

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LV - ANNO CXXVII

(1988)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LV - ANNO CXXVII

(1988)

LIGUORI EDITORE

UN OSSERVAZIONE SUL RIORDINAMENTO DEL
GRADIENTE DI UNA FUNZIONE

Nota di M. Rosaria Posteraro

Presentata dal Socio Guido Trombetti

Adunanza del 7/11/87

Riassunto Si dimostra che per una funzione di due variabili il cui gradiente assume soltanto i valori 0 e 1 la norma in L^2 é massima se si riordina il gradiente su una sfera in maniera crescente.

Abstract It is proved that a function of two variables, whose gradient takes only the values 0 and 1 attains its maximum when the gradient is rearranged in the spherically symmetric increasing way.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, una funzione non negativa. Indichiamo con μ_f la funzione di distribuzione di f :

$$\mu_f(t) = |\{x \in \Omega : f(x) > t\}| \quad t \geq 0$$

dove $|A|$ denota la misura dell'insieme A secondo Lebesgue.

Si definisce riordinamento decrescente di f e si indica con il simbolo f^* la funzione

$$f^*(s) = \sup \{t \geq 0 : \mu_f(t) > s\}$$

Si vede facilmente che f^* é l'unica funzione non crescente, almeno di insiemi di misura nulla, definita in $[0, +\infty]$ tale che

$$\mu_f(t) = \mu_{f^*}(t)$$

Si indica ancora con

$$f_*(s) = f^*(|\Omega| - s)$$

il riordinamento crescente di f .

In generale date due funzioni $f, g \geq 0$ si dice che f é un riordinamento di g o che f e g sono equimisurabili se

$$f^*(s) = g^*(s)$$

Per maggiori dettagli sui riordinamenti e sulle loro proprietà si rimanda a G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya [4], C. Bandle [2], G. Talenti [7].

Si noti che non é necessario che f e g siano definite sullo stesso dominio, ma su domini di uguale misura.

Detto L un numero reale positivo, fissiamo una funzione $\varphi \in L^p(0, +\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ tale che $\varphi = \varphi^*$ e $\varphi(t) = 0 \forall t \geq L$. Consideriamo un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. E' noto che (cfr. P.L. Lions [3]) per ogni funzione $f \geq 0$ in $L^p(\Omega)$ esiste una sottosoluzione massimale del problema

$$|Du| \leq f \text{ q.o. in } \Omega \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Vogliamo studiare "come deve essere riordinata f " affinché la norma di u in un qualche L^p sia massima; cioè considerato il seguente problema di massimizzazione

$$I(\Omega) = \sup \left\{ \|u\|_{L^q(\Omega)} \mid f \in L^p(\Omega), f^* = \varphi \right\}$$

dove $q \in [1, Np/(N-p)]$ se $p < N$, $1 \leq q < +\infty$ se $p = N$;
 $1 \leq q \leq +\infty$ se $p > N$ e $|\Omega| = L$, ci si chiede se esiste un aperto Ω e un riordinamento del gradiente di u che rendano massima la sua norma.

Si ha (cfr. Alvino-Lions-Trombetti [1])

TEOREMA Sia B la sfera di volume L e raggio R . Esistono u , f a simmetria sferica su B con $f^* = \varphi$ tali che

$$I(B) = \|u\|_q \quad u = \int_{|x|}^R f(s) ds$$

e cioè

$$|Du| = f \text{ q.o. su } B \quad u \in W_0^{1,p}(B)$$

Inoltre $I(B) \geq I(\Omega)$ per ogni aperto Ω di misura L .

Resta aperto il problema di vedere quale sia sulla sfera il riordinamento di f che realizza il massimo. Per i risultati di Giarrusso-Nunziante [3] se $N \geq 2$, nel caso $q = \infty$ e $q = 1$ il

massimo é unico e si ottiene riordinando f rispettivamente in maniera decrescente ($f(x) = \varphi(C_N |x|^N)$), e in maniera crescente ($f(x) = \varphi(L - C_N |x|^N)$), dove si é indicato con C_N la misura della sfera unitaria di R^N .

In questa nota si vuole esaminare il caso particolare in cui $N = 2$, $q = 2$, ed f é una funzione caratteristica.

Poniamo

$$|Dv| = g(\pi|x|^2) \quad v \in H_0^1(B) \quad (1)$$

dove B é la sfera di R^2 che si suppone, senza ledere la generalità del problema, abbia misura unitaria e centro nell'origine. Si ha quindi

$$v(\pi|x|^2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_2^1 g(r) r^{-\frac{1}{2}} dr \quad (2)$$

PROPOSIZIONE 1 Sia g una funzione misurabile su B che assume soltanto i valori 0 e 1. Posto

$$u(\pi|x|^2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_2^1 g^*(r) r^{-\frac{1}{2}} dr$$

(cioé $|Du| = g^*$)

si ha

$$\|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$$

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione di tale proposizione verrà fatta in due tappe.

STEP 1 Dimostriamo che la disuguaglianza vale nel caso di funzioni a scalino. A tal fine fissati $0 \leq s < s + \delta \leq \bar{s} < 1$ sia

$$g(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < s \\ 1 & s \leq r < s + \delta \\ 0 & s + \delta \leq r < \bar{s} \end{cases}$$

e in $[\bar{s}, 1]$ $g(r) = 1$ in un numero finito di intervalli e $g(r) = 0$ altrove.

Si ha per la (2)

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 v^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[v(\bar{s}) + 2 \left[(s + \delta)^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}} \right] \right]^2 \int_0^s dx + \right. \\ &\quad \int_s^{s+\delta} \left[v(\bar{s}) + 2 \left[(s + \delta)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right] \right]^2 dx + v^2(\bar{s}) \int_{s+\delta}^{\bar{s}} dx + \\ &\quad \left. + \int_{\bar{s}}^1 v^2(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando la (4) come funzione di s e ponendo

$$G(s) = \int_0^1 v^2(t) dt \quad s \in [0, \bar{s} + \delta]$$

si ha

$$G'(s) = \frac{1}{4\pi} \left\{ 2 v(\bar{s}) \left[(s + \delta)^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}} \right] + \right.$$

$$+ 4 (2s + \delta) (s + \delta)^{-\frac{1}{2}} \left[(s + \delta)^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}} \right] + \\ - \frac{8}{3} (s + \delta)^{-\frac{1}{2}} \left[(s + \delta)^{3/2} - s^{3/2} \right] \Big\}$$

Risulta $G'(s) > 0$ dal momento che $\bar{v}(s) \geq 0$ e

$$4 (2s + \delta) (s + \delta)^{-\frac{1}{2}} \left[(s + \delta)^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}} \right] + \\ - \frac{8}{3} (s + \delta)^{-\frac{1}{2}} \left[(s + \delta)^{3/2} - s^{3/2} \right] > 0 \quad (5)$$

Infatti risolvendo la (5)

$$[(s + \delta) + s] \left[(s + \delta)^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}} \right] > \frac{2}{3} \left[(s + \delta)^{3/2} - s^{3/2} \right]$$

da cui

$$(s + \delta)^{3/2} - 3(s + \delta)s^{\frac{1}{2}} + 3s(s + \delta)^{\frac{1}{2}} - s^{3/2} > 0$$

e cioè

$$\left[(s + \delta)^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}} \right]^3 > 0$$

La (5) quindi risulta verificata per ogni s .

Dunque la funzione $G(s)$ è strettamente crescente ed ha un massimo nel punto $s = \bar{s} + \delta$. Ciò equivale a dire che la norma di v in $L^2(B)$ aumenta spostando verso la frontiera della sfera i punti in cui $g(r) = 1$. In altri termini il riordinamento di g che rende massima la norma di v è quello crescente.

OSSERVAZIONE Nel caso in cui g è una funzione a scalino il mas-

simo é unico e nella (3) vale la diseguaglianza stretta.

STEP 2 Dimostriamo ora la proposizione per una generica funzione caratteristica. Consideriamo quindi nella (1) $g(r) = \chi_A$ dove A é un qualunque insieme misurabile dell'intervallo $[0, 1]$. E' possibile approssimare A con un insieme che sia unione finita di intervalli. Più precisamente (cfr. Shilov [6]) per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste un insieme B_ε del tipo suddetto tale che

$$A = (B_\varepsilon \cup A_\varepsilon) - C_\varepsilon$$

dove $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ e $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$.

Poiché

$$A - B_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon \quad \text{e} \quad B_\varepsilon - A \subseteq C_\varepsilon$$

si ha

$$\begin{aligned} & \| \chi_A - \chi_{B_\varepsilon} \|_2^2 = \\ &= \mu[(A - B_\varepsilon) \cup (B_\varepsilon - A)] = \\ &= \mu(A - B_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon - A) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Esiste quindi una successione di insiemi $\{B_n\}$ che sono unione finita di intervalli, tale che

$$\chi_{B_n} \xrightarrow{L^2} \chi_A$$

da cui ponendo

$$v_n(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s^1 \chi_{B_n} r^{-\frac{1}{2}} dr$$

si ha

$$v_n(s) \xrightarrow{L^2} v(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s^1 \chi_A r^{-\frac{1}{2}} dr$$

Indicando con $\tilde{v}_n$ e $\tilde{v}$ le funzioni che si ottengono riordinando in maniera crescente rispettivamente χ_{B_n} e χ_A e ricordando che

$$\chi_{*B_n} = \chi_{[1-\mu(B_n), 1]} \quad \text{e} \quad \chi_{*A} = \chi_{[1-\mu(A), 1]}$$

si ottiene

$$\tilde{v}_n(s) = \int_s^1 \chi_{*B_n} r^{-\frac{1}{2}} dr \xrightarrow{L^2} \tilde{v}(s) = \int_s^1 \chi_{*A} r^{-\frac{1}{2}} dr$$

dal momento che $\mu(B_n) \longrightarrow \mu(A)$.

Poiché per il risultato dimostrato nello step 1

$$\|v_n\|_{L^2} < \|\tilde{v}_n\|_{L^2}$$

tra i rispettivi limiti sarà

$$\|v\|_{L^2} \leq \|\tilde{v}\|_{L^2}$$

che é quanto si voleva provare.

Il risultato della proposizione 1 non si estende a funzioni che abbiano codominio diverso da $\{0,1\}$. Sia $0 < h < s_0 \leq |B|$ e

$$g(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq s_o - h \\ 2 & s_o - h < r < s_o \\ 1 & s_o \leq r \leq |B| \end{cases}$$

Indicata con $v(\pi |x|^2)$ la funzione definita dalla (2) si ha

$$\begin{aligned} \|v\|_2^2 &= G(s_o) = \\ &= 4 \left[-\frac{1}{6} s_o^2 + \frac{5}{6} (s_o - h)^2 + \frac{2}{3} s_o^{3/2} |B|^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} (s_o - h)^{3/2} (|B| + s_o^{\frac{1}{2}}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} |B|^2 \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G'(s_o) &= \\ &= 4 \left[\frac{4}{3} s_o - \frac{5}{3} h + s_o^{\frac{1}{2}} |B|^{\frac{1}{2}} - (s_o - h)^{\frac{1}{2}} (|B|^{\frac{1}{2}} + s_o^{\frac{1}{2}}) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} (s_o - h)^{3/2} s_o^{-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Per funzioni di questo tipo il massimo di $\|v\|_2$ non si ottiene riordinando g in maniera crescente né in maniera decrescente.

Ad esempio posto $h = 1$ e $|B| = 4$ si ha

	$s_o=1$	$s_o=2$	$s_o=2.5$	$s_o=3$	$s_o=3.5$	$s_o=4$
$G(s_o)$	11.33	17.28	17.52	17.56	17.44	17.24
$G'(s_o)$	6.66	0.68	3.32	-0.096	-0.32	-0.48

In questo caso, se ci si limita a considerare riordinamenti in cui

i punti tali che $g(r) = 2$ si trovano su una corona circolare, é verosimile congetturare che il massimo si ottiene quando tale corona circolare si trova all'incirca equidistante dal centro e dalla frontiera.

B I B L I O G R A F I A

- 1 - A. Alvino, P.L. Lions, G. Trombetti: On optimization problem with prescribed rearrangement. Nonlinear Anal. T.M.A.
(to appear)
- 2 - C. Bandle: Isoperimetric inequalities and applications.
Monographs and Studies in Math., Pitman, London, (1980).
- 3 - E. Giarrusso, D. Nunziante: Symmetrization in a class of first-order Hamilton-Jacobi equations. Nonlinear Analysis T.M.A.
8 (4) 1984 p. 289 -299.
- 4 - G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya: Inequalities Cambridge Univ. Press, 1964.
- 5 - P.L. Lions: Generalized solutions of Hamilton - Jacobi equations.
Pitman, London, 1982.
- 6 - G. YE. Shilov: Mathematical Analysis. A Special course.
Pergamon Student Editions, 1965
- 7 - G. Talenti: Elliptic equations with rearrangements. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Volumes in Honour Jean Leray, 1978,
p. 141 - 162.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni
"R. Caccioppoli"
Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli

SULLA SIMMETRIZZAZIONE PER UN PROBLEMA
MISTO NON LINEARE ELLITTICO DEGENERE

Nota di Massimo Calabritto (*)

Presentata dal Socio Prof. Guido Trombetti

Adunanza del 6-2-88

Riassunto

Si ottiene un risultato di simmetrizzazione per una classe di problemi ellittici degeneri non lineari e con condizioni al bordo miste.

Abstract

We obtain a symmetrization result for a class of nonlinear degenerate elliptic problems with mixed boundary conditions.

0-Introduzione

In questo lavoro consideriamo problemi del tipo

$$(0.1) \quad \begin{cases} Lu = -(a_{ij}(x) |Du|^{\lambda-2} u_{x_j})_{x_i} + g(x, u(x)) = f(x) & \text{in } G \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ \frac{du}{dl} = a_{ij}(x) u_{x_j} n_i = 0 & \text{su } \Gamma_1 \end{cases}$$

con $\lambda > 1$ dove $a_{ij}(x)$ sono funzioni misurabili in G , $g(x, \eta)$ è una funzione di Carathéodory tale che si abbia

$$(0.1)_b \quad g(x, \sigma) \sigma \geq c \sigma^2 \quad \text{per ogni } \sigma \in \mathbb{R}, \text{ q.o. in } G \text{ con } c \geq 0,$$

$\frac{du}{dl}$ è la derivata conormale di u , ed inoltre si ha:

$$(0.2) \quad a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq v(x) |\xi|^2 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ q.o. in } G$$

(*) Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", via Mezzocannone n. 8 - 80134 Napoli -

con $v(x) \geq 0$, $v(x) \in L^{\lambda-1}(G)$, $v^{-1}(x) \in L^t(G)$ con $t > 1$; l'aperto G sia un sottoinsieme connesso e limitato di R^n di misura fissata il cui bordo sia formato da due pezzi regolari Γ_0 e Γ_1 di cui Γ_0 avente misura $(n-1)$ -dimensionale di Hausdorff positiva.

Seguendo [10], cui rinviamo per ulteriori dettagli, poniamo

$$(\diamond) \quad Q(\Gamma_1, G) = \sup_E \frac{(\text{mis} E)^{1-1/n}}{P_G(E)}$$

dove E varia nella classe dei sottoinsiemi misurabili di G tali che $\partial E \cap \Gamma_0$ non abbia sottoinsiemi di misura $(n-1)$ -dimensionale positiva e $P_G(E)$ (cfr. [5]) è il perimetro di E relativo a G ; $Q(\Gamma_1, G)$ è detta costante isoperimetrica relativa a Γ_1 .

Consideriamo due numeri $\alpha \in (0, \pi/2]$ ed $r \in (0, +\infty)$; denotiamo con $A(\alpha, r)$ il settore di R^n di ampiezza α e raggio r , cioè

$$(0.3) \quad A(\alpha, r) = \{x \in R^n : 0 < |x| < r, (x, \xi) > |x| \cos \alpha\}$$

ove $\xi = (1, 0, \dots, 0) \in R^n$. Si può verificare (cfr. ancora [10]) che se $Q(\Gamma_1, G) < +\infty$ e la misura $(n-1)$ -dimensionale di Γ_1 è positiva (così come noi supporremo sempre per fissare le idee) esiste $\alpha \in (0, \pi/2]$ tale che

$$(0.3)_b \quad Q(\Gamma_1, G) = (\alpha_n^{1/n})^{-1}$$

dove α_n è la misura del settore $A(\alpha, 1)$.

Indichiamo con $C_\alpha(G)$ il settore n -dimensionale di ampiezza α ed avente la stessa misura di G , con R_α il suo raggio e con $C_\alpha f(x)$ il riordinamento α -simmetrico di $f(x)$ cioè

$$(0.4) \quad C_\alpha f(x) = f^*(\alpha_n |x|^n) \quad , \quad x \in C_\alpha(G)$$

ove f^* è il riordinamento decrescente di $f(x)$ (cfr. nr. 1).

Consideriamo accanto al problema (0.1) il seguente

$$(0.5) \quad \begin{cases} -(\underline{v}(\alpha_n |x|^n)^{\lambda-1} |Dv|^{\lambda-2} v_{x_i})_{x_i} + cv = C_\alpha f(x) & \text{in } C_\alpha(G) \\ v = 0 & \text{su } \tilde{\Gamma}_0 = \{x \in \partial C_\alpha(G) : |x| = R_\alpha\} \\ \frac{dv}{dn} = 0 & \text{su } \tilde{\Gamma}_1 = \partial C_\alpha(G) - \tilde{\Gamma}_0 \end{cases}$$

$v(s)$ essendo una opportuna funzione definita in $[0, \text{mis}G]$, legata alla funzione $v(x)$ (cfr. nr. 2) ed α è collegata alla costante isoperimetrica relativa a Γ_1 tramite la (0.3)_b.

Il risultato che si stabilisce è che, dette rispettivamente u e v le soluzioni deboli (cfr. nr. 1) dei problemi (0.1) e (0.5), si ha

$$(0.6) \quad \begin{cases} C_\alpha u(x) \leq v(x) & \text{puntualmente in } C_\alpha(G) \quad \text{se } c=0 \\ \int_0^r u^*(s)ds \leq \int_0^r v^*(s)ds & \text{per ogni } r \in [0, \text{mis}G] \quad \text{se } c>0 \end{cases}$$

Tale risultato nel caso $v(x)=1$, $\lambda=2$ e $c=0$ si riduce a quello di [10]. Per un risultato nello stesso ordine di idee ma relativo ad $n=2$ ($v(x)=1, \lambda=2$) cfr. [4].

Utilizzando la (0.6) è possibile determinare, almeno nel caso $c=0$, stime a priori per norme di soluzioni deboli dei problemi (0.1) riuscendo a fornire un valore esplicito della costante di maggiorazione (la "migliore costante") (cfr. [2], [3], [4], [10], [11], [12]).

1- Riportiamo le seguenti notazioni ormai classiche (cfr. [2], [3], [4], [10], [11], [12]):

Se $u(x)$ è una funzione reale e misurabile definita in un insieme misurabile G di $\mathbb{R}^n$, si pone

$$(1.1) \quad \mu(t) = \text{mis}\{x \in G : |u(x)| > t\}, \quad t \in [0, \infty) \quad (\text{funzione distribuzione di } u)$$

$$(1.2) \quad u^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu(t) < s\}, \quad s \in [0, \infty] \quad (\text{riordinamento decrescente di } u)$$

$$(1.3) \quad u_*(s) = u^*(\text{mis}G - s) \quad (\text{riordinamento crescente di } u)$$

$$(1.4) \quad C_\alpha u(x) = u^*(\alpha_n |x|^n), \quad x \in C_\alpha(G) \quad (\text{riordinamento } \alpha\text{-simmetrico di } u)$$

Enunciamo alcuni risultati relativi ai riordinamenti (per ulteriori dettagli e commenti cfr. [4], [10], [12]).

Le funzioni $u(x)$, $u^*(s)$, $C_\alpha u(x)$ sono equidistribuite, cioè

$$\text{mis}\{x \in G : |u(x)| > t\} = \text{mis}\{s \geq 0 : u^*(s) > t\} = \text{mis}\{x \in C_\alpha(G) : C_\alpha u(x) > t\}$$

da cui si ottiene che queste tre funzioni hanno le stesse norme L^p , $p \in [1, \infty]$.

Un altro risultato importante è il seguente dovuto ad Hardy e Littlewood

$$(1.5) \quad \int_G |uv| dx \leq \int_0^\infty u^*(s) v^*(s) ds$$

da cui in particolare si ha

$$(1.6) \quad \int_A |u(x)| dx \leq \int_0^{\text{mis}A} u^*(s) ds$$

quali che siano le funzioni u e v reali e misurabili definite in G ed A sottoinsieme misurabile di G .

Sia $v(x)$ una funzione definita come nell'introduzione e consideriamo lo spazio

$$L_{\sqrt{v}}^{\lambda}(G) = \{u / \int_G v(x)^{\lambda-1} |u(x)|^{\lambda} dx < \infty\}$$

normato ponendo

$$\|u\|_{\lambda, \sqrt{v}} = \left(\int_G v(x)^{\lambda-1} |u(x)|^{\lambda} dx \right)^{1/\lambda}$$

Lo spazio di Sobolev con peso $W_{\sqrt{v}}^{1, \lambda}(G)$ è definito, ovviamente, come la classe delle funzioni appartenenti a $L_{\sqrt{v}}^{\lambda}(G)$ con le loro derivate distribuzionali prime (per ulteriori informazioni cfr. [1], [2], [11]).

Detto ciò, chiameremo soluzione debole di (0.1) una funzione $u(x) \in W_{\sqrt{v}}^{1, \lambda}(G)$ "che si annulla su Γ_0 " tale che $g(x, u(x)) \in L^1(G)$, $u(x)g(x, u(x)) \in L^1(G)$ ed inoltre:

$$(1.7) \quad \int_G (a_{ij}(x) |Du|^{\lambda-2} u_{x_j} \phi_{x_i}) dx = \int_G f(x) \phi(x) dx - \int_G g(x, u(x)) \phi(x) dx$$

per ogni funzione test $\phi(x) \in W_{\sqrt{v}}^{1, \lambda}(G)$ tale che " $\phi(x) = 0$ " su Γ_0 .

Supporremo sempre che sulla funzione sommabile $f(x)$, su $g(x, \sigma)$ e λ valgano le ipotesi atte a garantire l'esistenza di una soluzione debole.

2- Se $u \in W_{\sqrt{v}}^{1, \lambda}(G)$ è soluzione del problema (0.1) allora (cfr. [2], [3]) per ogni $s \in [0, \text{mis}G[$ si può costruire un sottoinsieme $D(s)$ di G tale che

- a) $\text{mis}D(s) = s$
- b) $s' < s'' \Rightarrow D(s') \subset D(s'')$
- c) $D(s) = \{x \in G / |u(x)| > t\}$ se $s = \mu(t)$

Consideriamo la funzione di s

$$\int_{D(s)} [1/v(x)] dx$$

essa é assolutamente continua per cui esiste una funzione $\underline{v}(s)$ tale che

$$(2.1) \quad \int_{D(s)} [1/v(x)] dx = \int_0^s [1/\underline{v}(t)] dt$$

La funzione $1/\underline{v}$ gode inoltre della seguente proprietà (cfr. lemma 2.2 di [3])

Lemma(Δ) - Se la funzione $v^{-1}(x) \in L^t(G)$ con $t > 1$, allora esiste una successione di funzioni $v_k(s)$ il cui riordinamento decrescente coincide con $v^*(s)$ tale che $1/v_k$ converge debolmente ad $1/\underline{v}$ in $L^t([0, \text{mis}G])$.

Sussistono allora i seguenti risultati la cui dimostrazione utilizza le tecniche introdotte in [11], [12], [2], [14].

Teorema 2.1 - Supponiamo che:

- (i) l'operatore L di (0.1) soddisfi le ipotesi enunciate nell'introduzione;
- (ii) il dominio G goda delle proprietà già elencate nell'introduzione, sia inoltre la sua costante isoperimetrica relativa a Γ_1 , $Q(\Gamma_1, G) = (\alpha_n^{1/n})^{-1}$
 $\alpha \in (0, \pi/2]$;
- (iii) $u(x)$ sia la soluzione debole del problema (0.1) appartenente allo spazio di Sobolev $W_v^{1,\lambda}(G)$;
- (iv) $v(x)$ sia la soluzione debole (a simmetria sferica) del problema simmetrizzato (0.5);

allora

$$(v) \quad \left\{ \begin{array}{ll} C_\alpha u(x) \leq v(x) & \text{puntualmente in } C_\alpha(G), \text{ se } c=0 \\ \int_0^r u^*(s) ds \leq \int_0^r v^*(s) ds & \text{per ogni } r \in [0, \text{mis}G], \text{ se } c>0 \end{array} \right.$$

1° passo : Vale la seguente disuguaglianza

$$(2.2) \quad -\frac{d}{dt} \int_{|u|>t} v(x)^{\lambda-1} |Du|^\lambda dx \leq \int_0^{\mu(t)} f^*(s) ds - c \int_0^{\mu(t)} u^*(s) ds \quad \text{per q.o. } t > 0.$$

Infatti per ipotesi sappiamo che $u(x) \in W_v^{1,\lambda}(G)$ ed " $u = 0$ su Γ_0 " ed è soluzione del problema (0.1) quindi varrà la (1.7). In particolare possiamo prendere come funzioni test

$$(2.3) \quad \phi(x) = \begin{cases} u(x) - t & \text{se } u(x) > t \\ u(x) + t & \text{se } u(x) < -t \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad t > 0$$

Per il lemma 8.31 di [1] queste $\phi(x)$ appartengono allo spazio $W_{\nu}^{1,\lambda}(G)$ e si annullano su Γ_0 ; si ha allora subito con $h > 0$ e $t > 0$:

$$(2.4) \quad - \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} \leq \int_{|u| > t+h} |f(x)| dx + \int_{t < |u| \leq t+h} |f(x)| dx + \\ - \int_{t < |u| \leq t+h} g(x, u(x)) \operatorname{sgnu} dx - \int_{|u| > t+h} g(x, u(x)) \operatorname{sgnu} dx$$

quindi passando al limite per h tendente a zero e tenendo conto che per l'ipotesi (0.1)_b si ha $g(x, u(x)) \operatorname{sgnu} \geq c|u|$ si ottiene (per quasi ogni $t > 0$)

$$(2.5) \quad - \phi'(t) \leq \int_{|u| > t} |f(x)| dx - c \int_{|u| > t} |u| dx$$

Dalle (1.6) e (2.5) si ha la (2.2).

2° passo : vale la seguente relazione

$$(2.6) \quad - \frac{1}{\mu'(t)} \leq \left[\frac{1}{n\alpha_n^{1/n} \mu(t)^{1-1/n}} \right]^{\lambda/(\lambda-1)} \frac{1}{\underline{\nu}(\mu(t))} \left[- \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} \nu^{\lambda-1} |Du|^{\lambda} dx \right]^{\frac{1}{\lambda-1}}$$

Dalla (*) con $E = \{ x \in G / |u(x)| > t \}$ si ha

$$Q(\Gamma_1, G) \geq \frac{(\mu(t))^{1-1/n}}{P_G(\{x \in G / |u(x)| > t\})}$$

da cui si deduce che $P_G(\{x \in G / |u(x)| > t\}) \geq n\alpha_n^{1/n} \mu(t)^{1-1/n}$ e quindi, in forza della formula di Fleming e Rishel (cfr. [6]),

$$- \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} |Du| dx = P_G(\{x \in G / |u(x)| > t\})$$

da cui

$$(2.7) \quad n\alpha_n^{1/n} \mu(t)^{1-1/n} \leq - \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} |Du| dx \quad \text{per q.o. } t > 0.$$

A questo punto, mediante la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int_{t < |u| \leq t+h} |Du| dx \leq \left(\int_{t < |u| \leq t+h} v(x)^{\lambda-1} |Du|^{\lambda} dx \right)^{1/\lambda} \left(\int_{t < |u| \leq t+h} [1/v(x)] dx \right)^{(\lambda-1)/\lambda}$$

dividendo per h ambo i membri e passando al limite per h tendente a zero si ha

$$(2.8) \quad - \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} |Du| dx \leq \left(- \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} v(x)^{\lambda-1} |Du|^{\lambda} dx \right)^{1/\lambda} \left(- \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} \frac{dx}{v(x)} \right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}};$$

tenendo presente la (2.7) e che

$$\int_{|u| > t} [1/v(x)] dx = \int_0^{\mu(t)} [1/\underline{v}(s)] ds$$

per cui

$$- \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} [1/v(x)] dx = \frac{1}{\underline{v}(\mu(t))} (-\mu'(t)) ,$$

si ha la (2.6).

3° passo : dalle (2.2) e (2.6) si ha

$$(2.9) \quad 1 \leq \frac{1}{[n\alpha_n^{1/n} \mu(t)^{1-1/n}]^{\lambda/(\lambda-1)}} \left(- \frac{\mu'(t)}{\underline{v}(\mu(t))} \right) \left(\int_0^{\mu(t)} f^*(s) ds - c \int_0^{\mu(t)} u^*(s) ds \right)^{\frac{1}{\lambda-1}}$$

ne segue, ricordando la definizione di riordinamento decrescente

$$-u^*(r) \leq \left(\frac{1}{n\alpha_n^{1/n}} \right)^{\lambda/(\lambda-1)} \frac{r^{(-1+1/n)[\lambda/(\lambda-1)]}}{\underline{v}(r)} \left(\int_0^r f^* - c \int_0^r u^* \right)^{1/(\lambda-1)} .$$

Se $v(x)$ è la soluzione a simmetria sferica decrescente del problema simmetrizzato (0.5) (che esiste per ipotesi) è facile verificare che essa soddisfa l'equazione

$$-v'(r) = \frac{1}{(n\alpha_n^{1/n})^{\lambda/(\lambda-1)}} \frac{r^{(-1+1/n)[\lambda/(\lambda-1)]}}{\underline{v}(r)} \left(\int_0^r f^* - c \int_0^r v^* \right)^{1/(\lambda-1)}$$

Posto allora

$$U(r) = \int_0^r u^*(s) ds, \quad V(r) = \int_0^r v^*(s) ds \quad r \in [0, \text{mis}G]$$

si ha

$$(U(r)-V(r))'' + H(r) \{ [\int_0^r f^* ds - cU]^{1/(\lambda-1)} - [\int_0^r f^* ds - cV]^{1/(\lambda-1)} \} \geq 0$$

con $U(0) = V(0) = 0$, $U'(\text{mis}G) = V'(\text{mis}G) = 0$ e con ovvio significato

del simbolo $H(r)$. Osservato che $U < V \Rightarrow [\int_0^r f^* ds - cU] > [\int_0^r f^* ds - cV]$, si ha, nel caso $c > 0$, con un ragionamento tipo principio di massimo,

$$U(r) \leq V(r) \quad \text{per ogni } r \in [0, \text{mis} G] .$$

Nel caso $c=0$ si ha invece:

$$U''(r) \geq V''(r) \quad \text{per ogni } r \in [0, \text{mis} G]$$

da cui immediatamente

$$u^*(s) \leq v^*(s)$$

da cui la tesi ■

Osservazione : ovviamente dalla (v) discende subito che

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq \|v\|_{L^p(C_\alpha(G))} \quad \text{per ogni } p \in [1, +\infty]$$

Procedendo sempre come in [11],[12],[2] si ha nel caso $c=0$

Teorema 2.2 - Sotto le ipotesi del teorema precedente si ha

$$(2.10) \quad \int_G v(x)^{q-1} |Du|^q dx \leq \int_{C_\alpha(G)} \underline{v}(\alpha_n |x|^n)^{q-1} |Dv|^q dx \quad \text{per ogni } q \in (0, \lambda].$$

dim : Usando la disuguaglianza di Hölder con $p = \frac{\lambda}{q}$, $p' = \frac{\lambda}{\lambda-q}$ si ha, per $h > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{t < |u| \leq t+h} v(x)^{q-1} |Du|^q dx \leq \\ & \leq \left(\int_{t < |u| \leq t+h} [1/v(x)] dx \right)^{(\lambda-q)/\lambda} \left(\int_{t < |u| \leq t+h} v(x)^{\lambda-1} |Du|^\lambda dx \right)^{q/\lambda} \end{aligned}$$

da cui

$$- \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} v(x)^{q-1} |Du|^q dx \leq \left(- \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} [1/v(x)] dx \right)^{\frac{\lambda-q}{\lambda}} \left(- \frac{d}{dt} \int_{|u| > t} v^{\lambda-1} |Du|^\lambda dx \right)^{\frac{q}{\lambda}}$$

e quindi, in forza di (2.2) e (2.6)

$$\frac{\frac{d}{dt} \int_{|u| > t} v(x)^{q-1} |Du|^q dx}{\mu'(t)/\underline{v}(\mu(t))} \leq (\alpha_n^{1/n} \mu(t)^{1-1/n})^{-q/(\lambda-1)} \left(\int_0^{\mu(t)} f^* ds \right)^{q/(\lambda-1)}$$

da cui la tesi, tenendo presente che

$$(2.11) \quad v(x) = (n\alpha_n^{1/n})^{-\lambda/(\lambda-1)} \frac{\int_0^x r^{\frac{\lambda}{n(\lambda-1)}-1} dr}{\alpha_n |x|^n} \left(\frac{1}{r} \int_0^r f^*(t) dt \right)^{1/(\lambda-1)} dr$$

e che

$$(2.12) \quad |Dv| = \frac{1}{v(\alpha_n |x|^n)} \left[\frac{(\alpha_n |x|^n)^{-1+1/n}}{n\alpha_n^{1/n}} \int_0^{\alpha_n |x|^n} f^*(t) dt \right]^{1/(\lambda-1)}$$

3- Sia $c = 0$.

Come esempio di applicazioni dei risultati precedentemente ottenuti forniamo una "maggiorazione ottimale" della norma L^∞ della soluzione u del problema (0.1) (cfr. [11], [2]).

A tale scopo posto

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f^*(r) dr$$

denotiamo con

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{s>0} s^{1/p} \bar{f}(s)$$

la norma di f in L^p -debole. Si ha allora

Teorema 3.1 - Nelle ipotesi del teorema 2.1, se $f(x) \in L(n,\infty)$, risulta

$$(3.1) \quad \|u\|_{L^\infty} \leq K \|f\|_{n,\infty}^{1/(\lambda-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{ove } K &= (n\alpha_n^{1/n})^{-\lambda/(\lambda-1)} \int_0^{\text{misG}} \frac{r^{-1+1/n}}{v_*(r)} dr \leq \\ &\leq (n\alpha_n^{1/n})^{-\lambda/(\lambda-1)} \left[\frac{n}{(1-n)t'+n} (\text{misG})^{\frac{(1-n)t'+n}{n}} \right]^{1/t'} \|1/v\|_{L^t} = Y ; \end{aligned}$$

K è la "migliore costante" (ovviamente Y è finita se $1/v(x) \in L^t(G)$, $t > n$).

dim : dal teorema 2.1 si ha

$$\|u\|_{L^\infty} \leq (n\alpha_n^{1/n})^{-\lambda/(\lambda-1)} \|f\|_{n,\infty}^{1/(\lambda-1)} \int_0^{\text{misG}} \frac{r^{-1+1/n}}{v(r)} dr .$$

Per il lemma 2.2 di [3] esiste una successione $\{v_k\}_k$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ $v_k^* = v^*$ e $1/v_k$ converge debolmente a $1/v$ in $L^t([0, \text{misG}])$; quindi per ogni $s \in (0, \text{misG})$ si avrà

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_s^{\text{misG}} r^{-1+1/n} [1/v_k(r)] dr = \int_s^{\text{misG}} r^{-1+1/n} [1/v(r)] dr ;$$

ma per la disuguaglianza (1.5) possiamo scrivere (con $s > 0$)

$$\begin{aligned} \int_s^{\text{misG}} r^{-1+1/n} [1/v_k(r)] dr &\leq \int_0^{\text{misG}} r^{-1+1/n} [1/v_k(r)] dr \leq \\ &\leq \int_0^{\text{misG}} r^{-1+1/n} [1/v_*(r)] dr , \end{aligned}$$

da cui la tesi ■

In modo analogo si può ottenere , a partire dalla (2.10), una formula di maggiorazione per

$$\int_G v(x)^{q-1} |Du|^q dx$$

Infatti tenendo conto della (2.12) si ha:

$$\int_G v(x)^{q-1} |Du|^q dx \leq \int_0^{\text{misG}} \frac{1}{v(r)} \left[\frac{r^{-1+1/n}}{n\alpha_n^{1/n}} \int_0^r f^*(t) dt \right]^{q/(\lambda-1)} dr$$

usando di nuovo il lemma 2.2 di [3] e la disuguaglianza di Hölder si ha

(preso $s > 0$)

$$\int_s^{\text{misG}} \frac{1}{v_k(r)} \left[\frac{r^{-1+1/n}}{n\alpha_n} \int_0^r f^*(t) dt \right]^{q/(\lambda-1)} dr \leq$$

$$\leq \frac{\|v^{-1}\|_t}{(n\alpha_n)^{1/n} q/(\lambda-1)} \left(\int_0^{\text{misG}} [\tilde{f}(t)]^{\frac{qt}{(\lambda-1)(t-1)}} r^{\frac{qt}{n(t-1)(\lambda-1)}} dr \right)^{\frac{t-1}{t}} ;$$

per avere poi una maggiorazione in termini della norma di f in L^p basta utilizzare la disuguaglianza di Bliss (cfr. [12]).

Altre formule di maggiorazione possono essere ottenute procedendo sempre come in [11] ed in [2] a partire dal teorema 2.1 ed utilizzando il lemma 2.2 di [3].

BIBLIOGRAFIA

- [1] R.A.ADAMS, Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.
- [2] A.ALVINO - G.TROMBETTI, Su una classe di equazioni ellittiche non lineari degeneri, Ricerche di Mat. Vol.XXIX (1980).
- [3] A.ALVINO - G.TROMBETTI, Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri, Ricerche di Mat. Vol.XXVII(1978), 413 - 428.
- [4] C.BANDLE, Isoperimetric Inequalities and Applications, Pitman, London,1980.
- [5] E.DE GIORGI, Su una teoria generale della misura (r-1)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni, Ann.Mat.Pura Appl.,36 (1954).
- [6] W.FLEMING - R.RISHEL, An integral formula for total gradient variation, Arch. Math., (1960).
- [7] D.GILBARG - N.S.TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag, Berlin,Heidelberg,New York,Tokio, 1983.
- [8] G.H.HARDY - J.E.LITTLEWOOD - G.POLYA, Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1964.
- [9] R.O'NEIL, Convolution Operators and $L(p,q)$ Spaces, Duke Math. J.,30(1963).
- [10] F.PACELLA - M.TRICARICO, Symmetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions, Atti Sem. Mat. e Fis. Univ. Modena Vol. XXXIV (1986), 75-94.
- [11] G.TALENTI, Nonlinear Elliptic Equations,Rearrangements of Functions and Orlicz Spaces,Ann. Mat. Pura e Appl. (4) 120 (1979), 159-184.
- [12] G.TALENTI, Elliptic Equations and Rearrangements, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (4), 3 (1976).
- [13] G.TALENTI, Best Constant in Sobolev Inequality, Ann. Mat. Pura e Appl., 110 (1976), 353-372.
- [14] G.CHITI, Norme di Orlicz delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche, B.U.M.I. (5) 16 (1979), 178-185.

COASTAL DYNAMICS AND SEDIMENTARY TRANSIT AXES
ON THE VOLTURNO RIVER MOUTH (CAMPANIA, ITALY).

Nota di Tommaso DE PIPPO

Presentata dal Socio Ordinario Bruno D'ARGENIO

Adunanza del 5 marzo 1988

Riassunto - Lo studio sedimentologico condotto in corrispondenza del complesso di foce del F. Volturno (5) ha messo in evidenza la presenza di sedimenti disposti secondo fasce a diametro decrescente in funzione della profondità ed una netta tendenza all'arretramento di tutto il tratto litoraneo indagato a partire dall'inizio del XX secolo.

I caratteri tessiturali dei sedimenti dedotti dall'analisi di 117 campioni di fondo marino, e l'andamento morfologico dei fondali fanno ipotizzare che l'allontanamento dei materiali dalle spiagge e dai fondali prospicienti la foce avvenga essenzialmente ad opera di correnti lungocosta e/o per getto di riva relativamente ai materiali più grossolani mentre i sedimenti più fini vengono rimossi dalle aree litoranee e portati verso il largo da un sistema di rip currents che si muovono lungo le deboli depressioni che interrompono a tratti il cordone di barre sommerse più esterno.

Pertanto al fine di determinare le modalità e le direzioni di transito dei materiali presenti nelle zone antistanti la foce del F. Volturno si è proceduto ad un'analisi modale secondo il metodo proposto da Cortemiglia (7).

Abstracts - The sedimentological study carried out in correspondence to the Volturno River mouth (5) has established the presence of sediments located in some areas characterized by decrescent grain size according to the depth, and a net tendency to recession of the entire

investigated littoral since the beginning of the 20th century.

The textural characteristics of sediments obtained by the analysis of 117 samples of seabottom as well as its morphological trend have given rise to a hypothesis that the coarsest materials of the beach and of the bottom close to the mouth have been shifted by longshore currents and/or beach drift. The finest sediments are removed from the littoral area and taken offshore by a rip currents sistem moving along the weak depressions which frequently breaks the series of submerged outer bars.

Therefore, in order to determine the manner and the directions of the sediment drift in the zones facing the Volturno River, steps were taken to carry out a modal analysis based on the approach proposed by Cortemiglia (7).

MORPHOLOGICAL CHARACTERISTICS OF THE SHOREFACE

The study of the morphological characteristics of the sea bottom near to the Volturno River mouth has been carried out by the analysis of bathymetric profiles crosswise to the coast. They were based on datum points previously placed on the backshore at 100 m intervals. Moreover, in the mouth area other profiles have been carried out with a different orientation than the previous ones as well as one crosswise to the fluvial axis in corrispondence to the mouth.

The morphological trend of the seabottom (fig. 1) indicates the presence - in the northern area of the mouth - of two orders of submerged bars. A 5-m-deep trough divides the outer bars, situated parallel to the coast, from the more irregular inner ones located transversely to the shoreline.

Only a single order of bars is present to the south of the mouth, extending with a regular trend in an arrangement parallel to the shore, with a ridge generally located at ca.3 m and separated from the shore by a trough about 5 m deep.

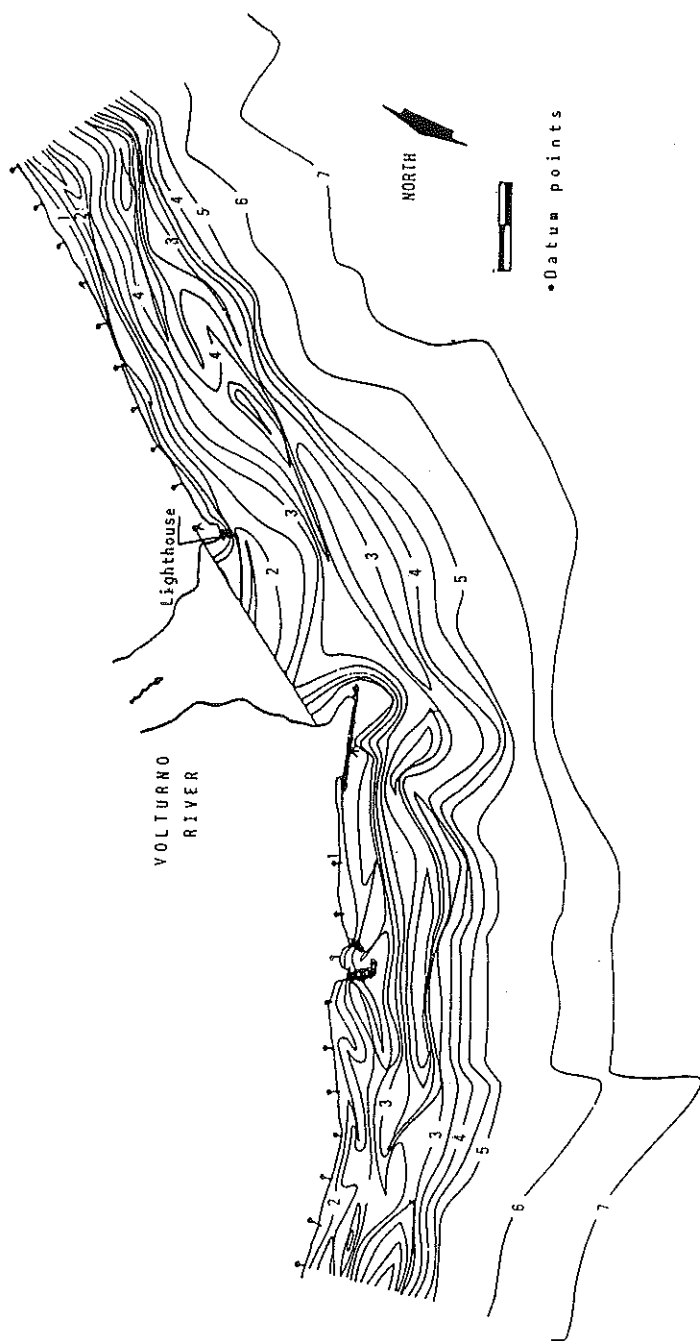


Fig. 1 - Bathymetric chart of Volturno River Mouth (from COCCO et Al., 1984)

In correspondence to the mouth there is a very wide bar that could be linked to the series of outer bars, although its section presents an asymmetry of flanks much less marked than other bars. In addition, the irregular trend of the bathymetric lines points out a rather distinct submerged river mouth complex with some weak incisions in the flanks located in correspondence to the slight depressions of the outer bar ridges and in axis with the greatest depth points of the troughs.

The mouth is characterized by the presence in the hydrographic right of a depth channel arranged longitudinally to the river and in the hydrographic left of a somewhat developed bar at a depth of 1.5 m.

Analysis of the bathymetric profiles - carried out with a continuous recording echograph Atlas Krupp 450 - has permitted us to recognise the area in which the modelling occurs, generally comprised between the shoreline and the breaker which, in our case, corresponds to the bathymetric of -5 m. The seabottom gradient between the coast and the breaker point ranges between 0.62% and 0.88% whereas going offshore the gradient increase to reach values of 2.5%. The offshore flank of the outer bar shows gradients ranging between 1.7% and 2.5% for the northern areas, 1.1% for the bar facing the mouth and 2.9% for the southern areas.

DYNAMICS OF THE SEDIMENTS

The textural analysis of sediments close to the Volturno River mouth has been conducted on 96 samples of the sea bottom and 21 samples of beach face (fig. 2). A PC Olivetti M20 program compiled according to the indications of Corradi and Cortemiglia (6), has permitted elaboration for each

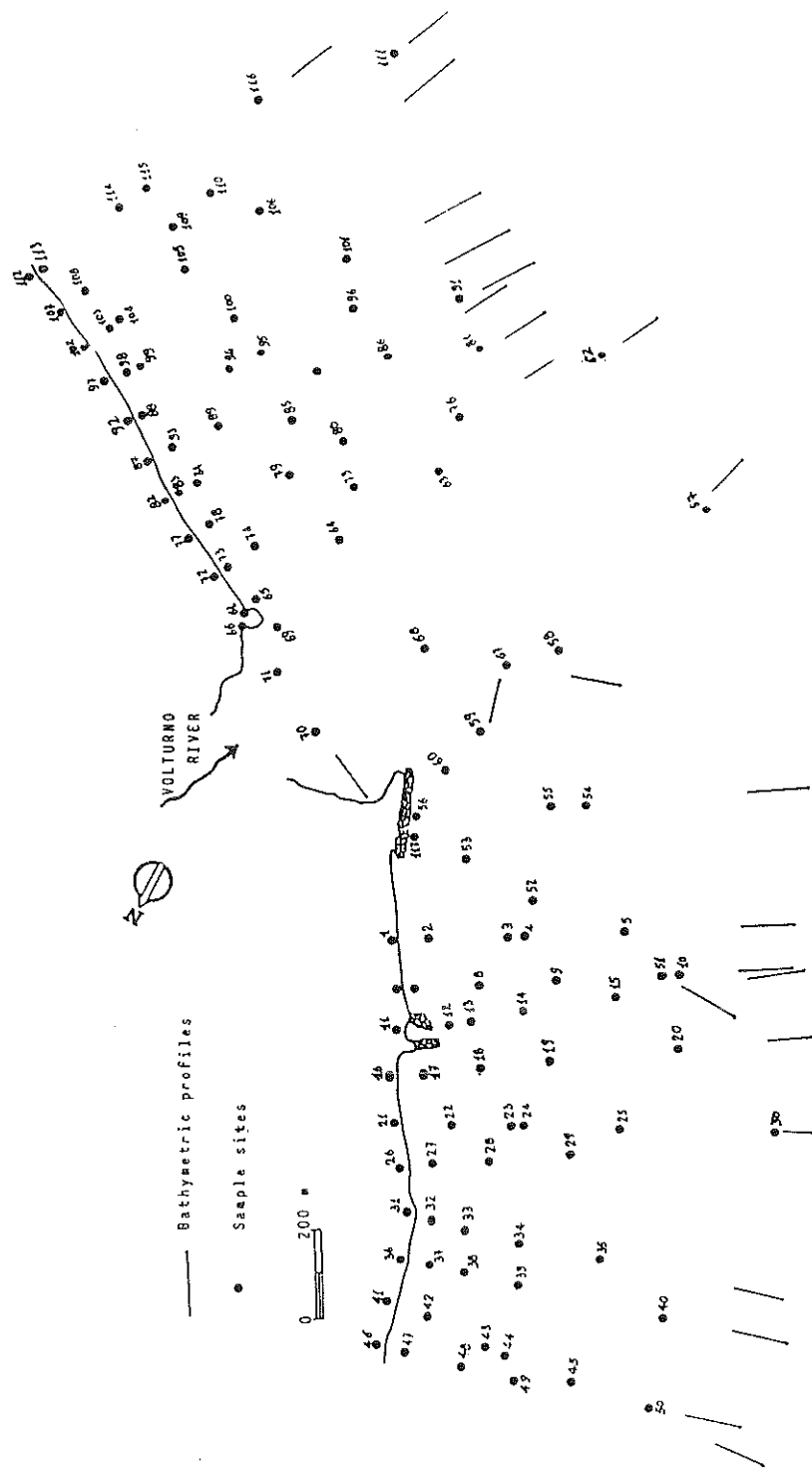


Fig. 2 - Sample sites and location of bathymetric profiles at Volturno River Mouth

single sample of the histogram, the frequency curve and the cumulative curve as well as the statistics index and parameters computations.

The distribution of the sediments according to the Mean Size by Mc Cammon (fig. 3) has demonstrated the presence of medium sand in correspondence to the river mouth and in an area ranging between 200 m to the north and 350 m to the south of it. Fine sands are present, especially, in the northern area and in front of the mouth, subordinately, in the southern area. Moreover, fine sands have been identified to the depth of -1 m in area close to the right and to the left of the river mouth in correspondence to the zone where both the ridge of the littoral bars and the troughs are at greater depth. Coarse sands are present in certain places on the beach face.

The study of the historical and recent evolution of the littoral laid down on the Volturno River mouth - achieved by the comparison of topographic maps for the period 1800-1954 as well as a set of aerial photographs for the period of 1954-1982 - has permitted us to recognize a persistent accretion of the littoral from 1800 to 1907. From 1907 to 1954 the littoral begins to present recession phenomena with medium rates of 1 m/year and 2 m/year respectively for the areas to the north and south of the mouth. Such phenomena continue until 1982 with an increase of the medium rates to reach 6 m/year in the right littoral and 19 m/year in the left (5).

In order to recognize the transit axes of the material which has regressed from the littoral areas in front of the river mouth, a modal analysis has been carried out applying the Cortemiglia's approach according to the technique tested by Barusseau (2), Pauc (11), Aguado (1) e Long (10) for the computation of the average modal relationship of each single

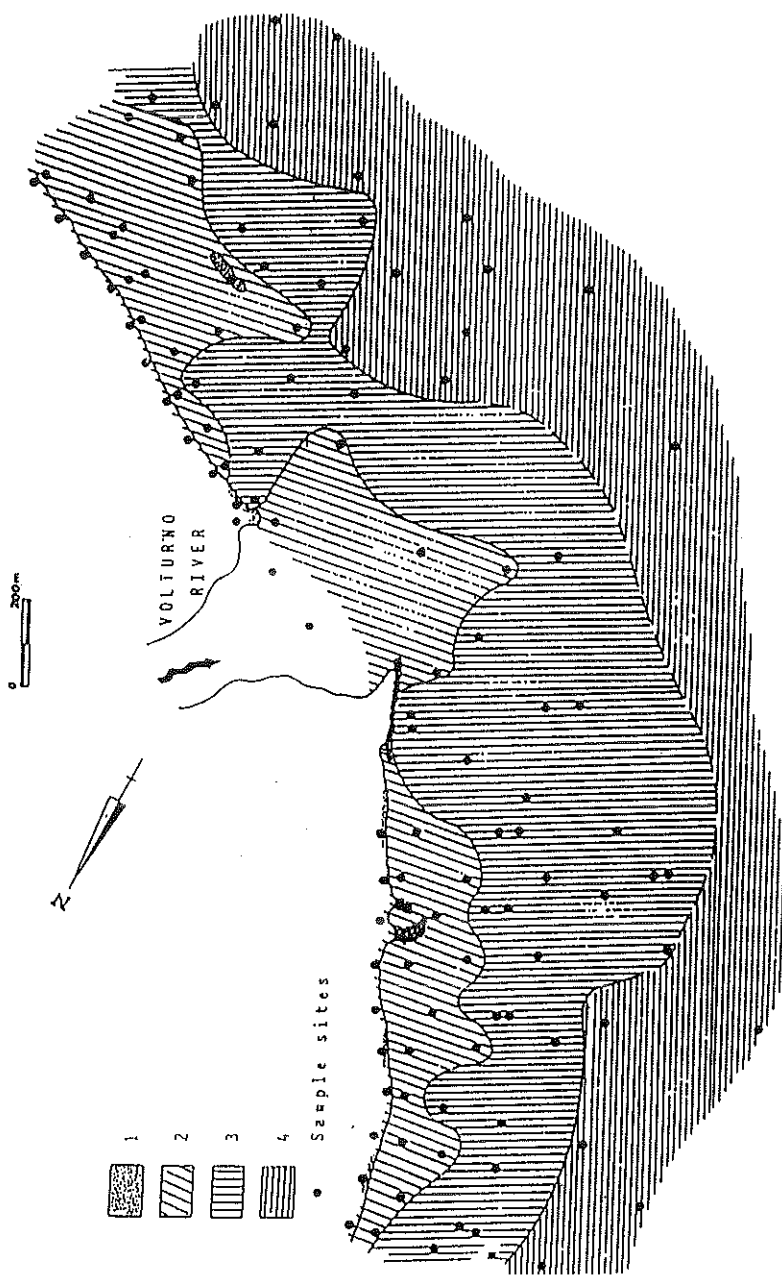


Fig. 3 - Distribution of the seabottom sediments according to McCammon's Mean Size. 1. Coarse sands; 2. Medium sands; 3. Fine sands; 4. Very fine sands (from COCCO et Al., 1984)

sample of sediments (Tab. 1).

From such application, considering the frequency of occurrence of the mode represented in fig. 4, it results that the seabottom sediments present 5 different subsamples - the characteristics of which (tab. 2) allow us to define the average modal relationship, thus:

(0.542) 6%+ (0.400) 29%+(0.320) 21%+(0.151) 16%+(0.108) 28%

However, the littoral drift is influenced in a determining way by the subsamples of medium, fine and very fine sands. The role of the coarsest sand is seen to be of less importance (only 6% of the total samples), confirming the mean size distribution.

Bearing in mind the application of the modal analysis, modal isodensity maps have been drawn up of the subsamples which principally participate in the littoral dynamics, permitting us to individualize the transit axes on which the distribution of the materials occurred.

From the analysis of modal isodensity curves of the medium sands (0.461-0.346 mm) it is possible to obtain sedimentary transit axes (fig. 5) which indicated a shifting of the materials - essentially by beach drift - from the areas close to the river mouth.

Beaches and seabottoms close to the Volturno River mouth, either to the north or to the south, are the areas which provide the materials redistributed along the transit axes

The presence of sediments belonging to the subsamples of medium sands in front of the river mouth is also due to the fact that the river supplies - albeit in a limited degree - deposition of coarsest materials, owing to the rapidly decreasing of the rate of river flow at the mouth, while finer sediments are carried offshore in suspension.

Regarding the subsamples of "medium sands" (0.334 -

1 -	(0.587) 100%	61 -	(0.436) 100%
2 -	(0.295) 100%	62 -	(0.104) 100%
3 -	(0.209) 43.5% + (0.116) 56.5%	63 -	(0.102) 100%
4 -	(0.536) 23% + (0.274) 40% + (0.121) 29%	64 -	(0.367) 100%
5 -	(0.119) 100%	65 -	(0.450) 63.5% + (0.033) 36.5%
6 -	(0.301) 100%	66 -	(0.450) 100%
7 -	(0.301) 100%	67 -	(0.442) 100%
8 -	(0.224) 100%	68 -	(0.400) 100%
9 -	(0.149) 100%	69 -	(0.434) 100%
10 -	(0.120) 100%	70 -	(0.400) 100%
11 -	(0.576) 100%	71 -	(0.430) 100%
12 -	(0.292) 100%	72 -	(0.385) 100%
13 -	(0.153) 100%	73 -	(0.321) 100%
14 -	(0.207) 50% + (0.120) 50%	74 -	(0.300) 100%
15 -	(0.100) 100%	75 -	(0.100) 100%
16 -	(0.422) 100%	76 -	(0.104) 100%
17 -	(0.359) 100%	77 -	(0.410) 100%
18 -	(0.329) 100%	78 -	(0.320) 100%
19 -	(0.386) 40% + (0.110) 60%	79 -	(0.286) 100%
20 -	(0.100) 100%	80 -	(0.098) 100%
21 -	(0.415) 100%	81 -	(0.105) 84.5% + (0.029) 15.5%
22 -	(0.314) 100%	82 -	(0.427) 100%
23 -	(0.240) 100%	83 -	(0.422) 100%
24 -	(0.214) 100%	84 -	(0.320) 100%
25 -	(0.190) 100%	85 -	(0.410) 100%
26 -	(0.461) 100%	86 -	(0.104) 100%
27 -	(0.366) 100%	87 -	(0.400) 100%
28 -	(0.297) 100%	88 -	(0.346) 100%
29 -	(0.105) 100%	89 -	(0.387) 100%
30 -	(0.102) 100%	90 -	(0.270) 100%
31 -	(0.400) 100%	91 -	(0.104) 100%
32 -	(0.417) 100%	92 -	(0.390) 100%
33 -	(0.250) 100%	93 -	(0.315) 100%
34 -	(0.247) 40.5% + (0.116) 51.5%	94 -	(0.750) 33% + (0.437) 67%
35 -	(0.096) 100%	95 -	(0.293) 44% + (0.111) 56%
36 -	(0.376) 100%	96 -	(0.100) 100%
37 -	(0.400) 100%	97 -	(0.430) 100%
38 -	(0.334) 100%	98 -	(0.332) 100%
39 -	(0.217) 42% + (0.114) 58%	99 -	(0.300) 100%
40 -	(0.094) 100%	100 -	(0.114) 100%
41 -	(0.436) 100%	101 -	(0.100) 100%
42 -	(0.290) 100%	102 -	(0.542) 43% + (0.320) 57%
43 -	(0.266) 100%	103 -	(0.551) 49% + (0.320) 51%
44 -	(0.197) 100%	104 -	(0.542) 42.5% + (0.299) 57.5%
45 -	(0.097) 100%	105 -	(0.281) 100%
46 -	(0.435) 100%	106 -	(0.100) 100%
47 -	(0.390) 100%	107 -	(0.367) 100%
48 -	(0.275) 100%	108 -	(0.312) 100%
49 -	(0.110) 100%	109 -	(0.352) 100%
50 -	(0.100) 100%	110 -	(0.100) 100%
51 -	(0.100) 100%	111 -	(0.100) 100%
52 -	(0.156) 100%	112 -	(0.310) 100%
53 -	(0.199) 100%	113 -	(0.504) 54.5% + (0.320) 45.5%
54 -	(0.150) 57% + (0.083) 43%	114 -	(0.559) 44% + (0.299) 56%
55 -	(0.372) 29% + (0.182) 71%	115 -	(0.109) 100%
56 -	(0.218) 100%	116 -	(0.077) 100%
57 -	(0.400) 9% + (0.152) 59% + (0.004) 32%	117 -	(0.190) 100%
58 -	(0.380) 19% + (0.167) 51% + (0.003) 30%		
59 -	(0.400) 41% + (0.202) 59%		
60 -	(0.418) 64.5% + (0.235) 35.5%		

Tab. I - Modal relationship of seabottom sediments sample; in brackets the sizes in mm

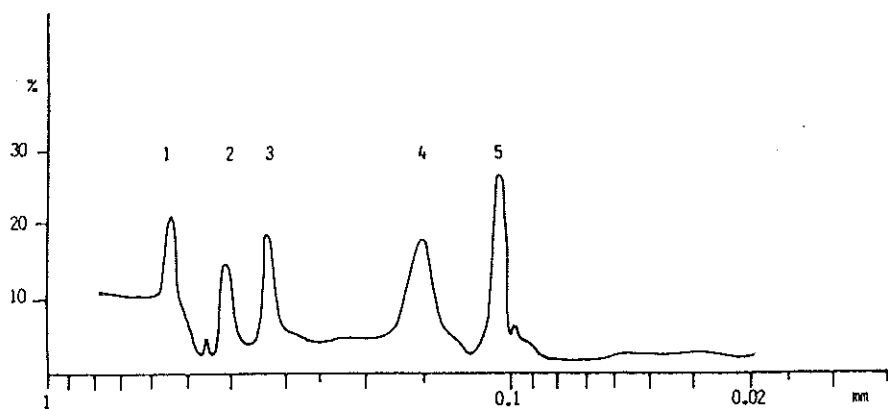


Fig. 4 - Frequency of occurrence of the mode; the peakes show the subpopulations present in the sediments

	GRAIN SIZE	SUBPOPULATION	PEAK	%
1-	Coarse sands	0.758-0.536	0.542	6
2-	Medium sands	0.461-0.346	0.400	29
3-	Medium sands	0.334-0.250	0.320	21
4-	Fine sands	0.248-0.128	0.151	16
5-	Very fine sands	0.121-0.077	0.108	28

Tab. 2 - Characteristics of modal classes of sediments

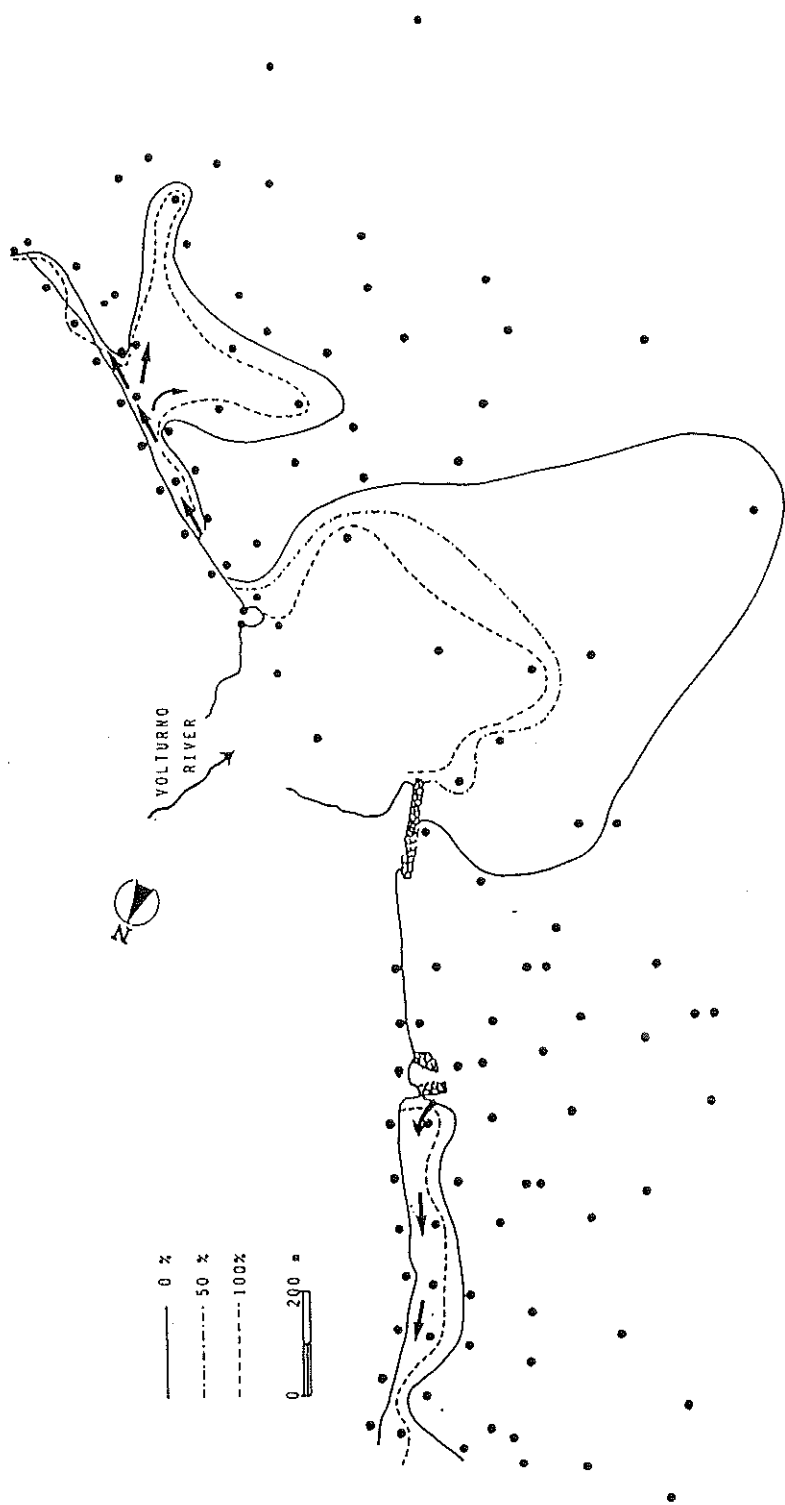


Fig. 5 - Modal isodensity curves corresponding to medium sands (0.461-0.346 mm).
The arrows show the transport trends.

0.250mm) (fig. 6), the transit axes indicate a participation of these materials in the coastal dynamics by means of longshore currents which move along the troughs between the first order of bars and the more external ones north of the river mouth. In the south of this the shifting always occurs by longshore currents, but in areas very near to the shoreline. In this instance, modal isodensity curves allow for the hypothesis that the finer portion of these sediments adjacent to the fine sand limit is also moved by current transversal to the shoreline. Beaches from which these materials are removed are located along the entire littoral.

Modal isodensity curves of the subsample of "fine sands" (0.248-0.128 mm) show transport trends (fig. 7) indicating a movement of the material toward the south, by longshore currents. Moreover, it is to be pointed out that the same transit axes reveal an offshore regression of the sediments along a direction indicating by a deepening of the trough and by the ridge of the bar; this evacuation towards greater depth is due to the presence of a rip current moving in that direction.

The materials involved in this circulation are taken away from areas such as the seabottom in front of the river mouth and beaches located to the north of it. Despite the presence of fine sands to the south of the river mouth - as shown in the map of the distribution of mean size, the modal analysis indicated that these sands do not take part in the coastal dynamics.

Modal isodensity curves of the "very fine sands" (0.121-0.077 mm) have permitted the individualization of transit axes transversal to the coast indicating an offshore displacement of the materials from the coastal areas (fig. 8). Transit vectors move along the greatest depth points of the troughs and into the outer bar breaks, owing essentially

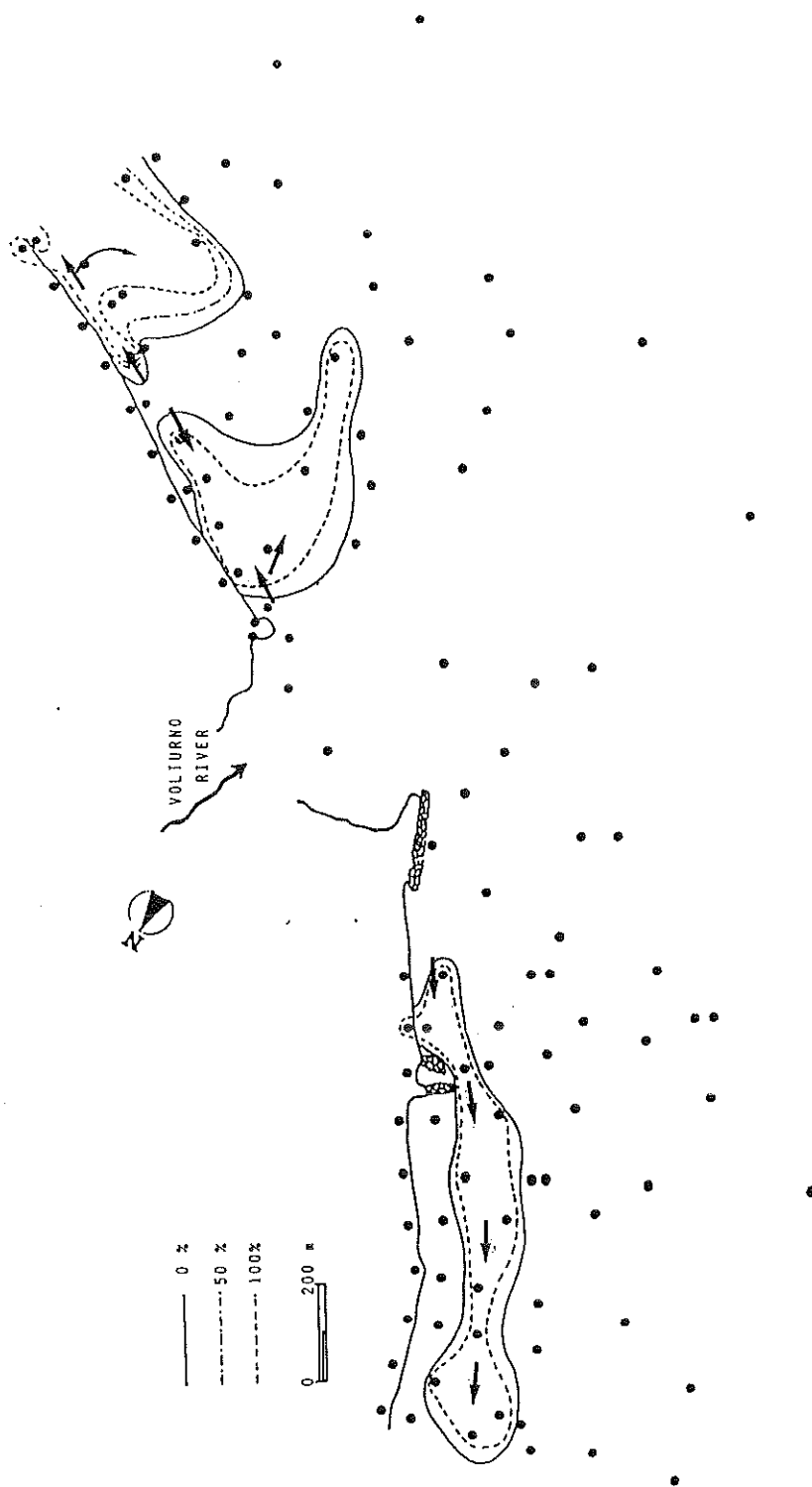


Fig. 6 - Modal isodensity curves of medium sands (0.344-0.250 mm). The arrows show the transport trends.

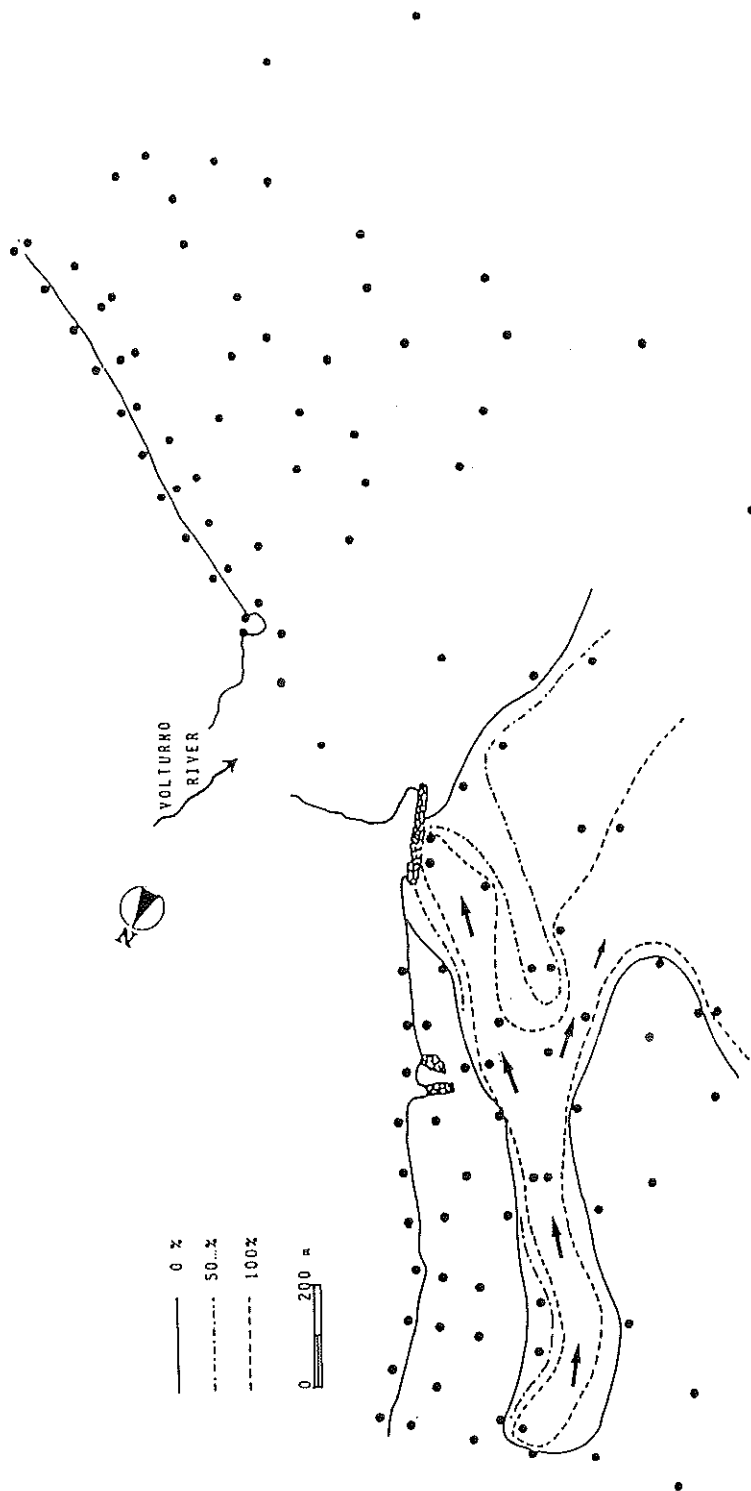


Fig. 7 - Modal isodensity curves corresponding to fine sands (0.248-0.128 mm).
The arrows show the transport trends.

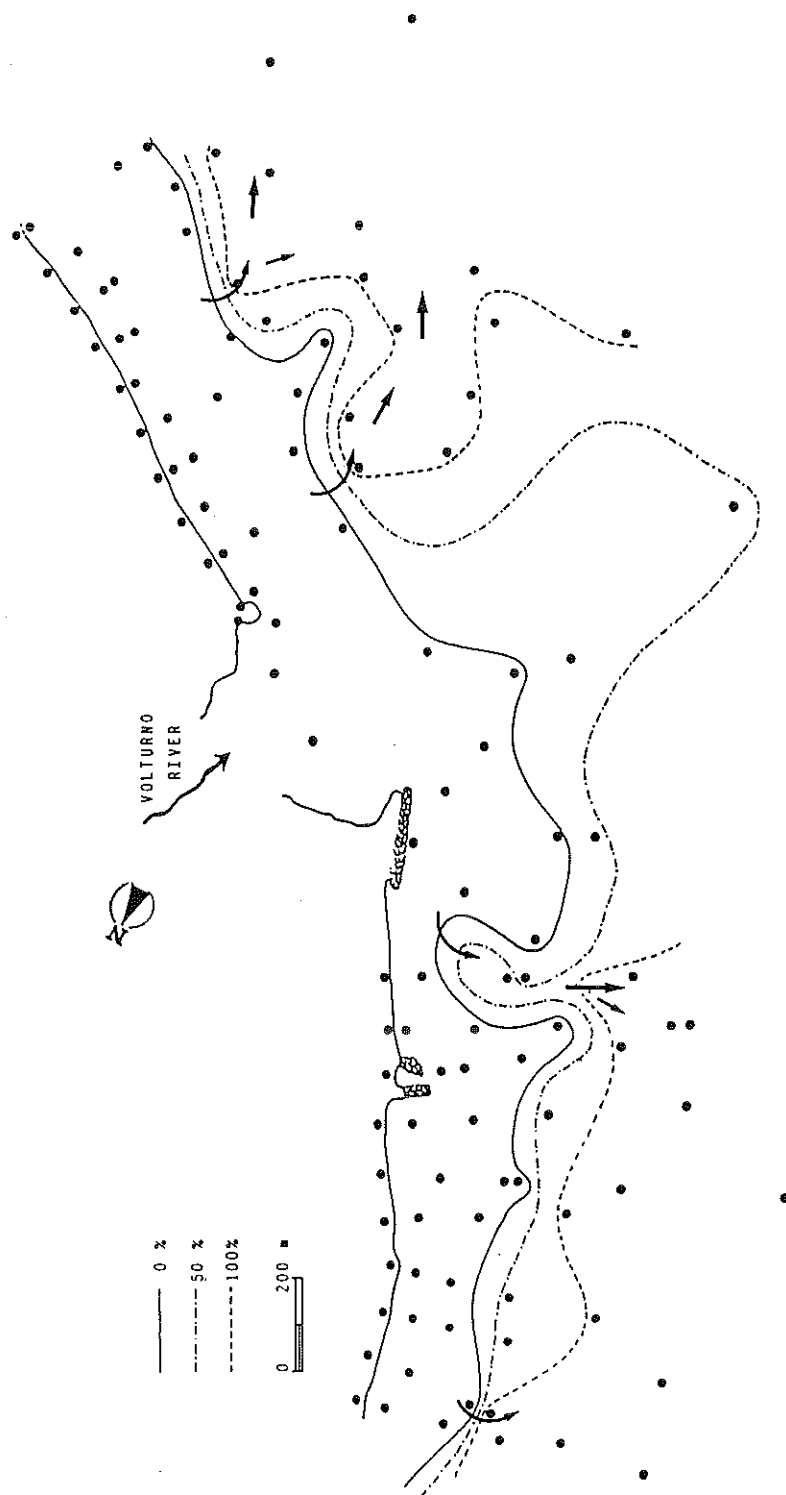


Fig. 8 - Modal isodensity curves of very fine sands (0.121-0.077 mm). The arrows show the transport trends.

to a system of rip current whose existence is also confirmed by the morphology of the seabottom.

Littoral zones from which the sediments are removed include the beaches situated at the south of the river mouth and the beach immediately north where presently there is an attempt to put a check on the erosive action of the sea by laying on some longitudinal revetment and/or structures transversal to the shoreline.

CONCLUDING REMARKS

The modal analysis carried out on the samples gathered on seabottoms in front of the Volturno River mouth complex has permitted us to recognize the existence of 5 subsamples, and to what degree they participate in the coastal dynamics - as well as the transit axes of the materials along the entire investigated littoral. Only 4 of the 5 subsamples are important in the littoral dynamics: they are medium sands (0.461-0.346 mm) and (0.334-0.250 mm), fine sands (0.248-0.128 mm) and very fine sands (0.121-0.077 mm). The analysis of modal isodensity curves relating to the materials which actively take part in the littoral dynamics has demonstrated that the medium sands are essentially shifted by beach drift and/or by longshore currents. Fine sands are moved by longshore currents parallel to the coast line, to greater depth than medium sands and sometimes removed offshore by rip-currents. Very fine sands, instead, are exclusively evacuated offshore by rip-currents which move along directions individualized by the morphological trend of the seabottom. In fact, the removal of very fine materials offshore occurs in areas where we observe the greatest depths of the troughs, linked with the deepening of

the ridge of the bars.

Considering that the load transport of the Volturno River has been considered nearly non-existent because of an artificial dam (Traversa di Ponte Annibale) close to the river mouth and that the littoral is in recession since 1909 at a rate of 19 m/year, we can presume that the materials which participate in this movement are taken away exclusively from the beaches and the seabottoms near the river mouth.

If an attempt to defend the coast were considered - especially in the area to the right of the river mouth where an obvious danger exists for the urban center of Castelvoturno - the solutions could be various considering the kind of littoral dynamics and materials, but we should not fail to examine the phenomena induced by eventual defence structures.

The "capture" of the materials which move by beach drift (medium sands) or by longshore currents (medium sands and fine sands) could be carried out by the building up of transversal difensive structures with the proper dimensions in order that the phenomena of wave riflission and wave expansion do not accelerate erosion phenomena on the downdrift of jetties.

Appropriation of the sediments removed by rip-currents (very fine sands) could be obtained by the arrangement of a series of submerged longitudinal revetment to safeguard the urban center of Castelvoturno; this type of structure could also reduce sea erosion action by shifting the breaking offshore and prevent the removal of the materials seaward by interrupting rip-current action.

Considering that the subsample of medium sands (0.461-0.346 mm) is essentially moved by beach drift, an artificial nourishment of the beach could be arranged by pouring coarser material onto the littoral - or at least

sand of the same size.

Tommaso DE PIPPO
Dip. di Scienze della Terra
Largo S.Marcellino, 10
Napoli

REFERENCES

- (1) J. AGUADO, "Estudio de la sedimentacion actual en la plataforma continental al W de Cabo de Gata (Almeria)"; These Univ. Madrid, pp. 1-60 (1973).
- (2) J.P. BARUSSEAU, "Evolution du Plateau continental rochelais (Golfe de Gascogne) au cours du Pleistocene terminal et de l'Holocene. Les processus actuels de la sedimentation"; Thèse Univ. Bordeaux I, pp. 1-363 (1973).
- (3) E. COCCO, G. CASTALDO, M.A. de MAGISTRIS, T. DE PIPPO & G. D'IORIO, "Dinamica ed evoluzione del litorale campano-laziale: 1.11 tratto a sud del Fiume Volturno"; Atti del IV Congr. A.I.O.L., 58, pp. 1-11 (1980).
- (4) E. COCCO, M.A. de MAGISTRIS, T. DE PIPPO & A. PERNA, "Dinamica ed evoluzione del litorale campano-laziale: 2.11 settore a nord del Fiume Volturno"; Atti del V° Congr. A.I.O.L., pp. 287-303 (1982).
- (5) E. COCCO, M.A. de MAGISTRIS, T. DE PIPPO & A. PERNA, "Dinamica ed evoluzione del litorale campano-laziale: 3.11 complesso di foce del Fiume Volturno"; Atti del VI° Congr. A.I.O.L., pp. 279-287 (1984).
- (6) N. CORRADI & G.C. CORTEMIGLIA, "Meccanizzazione dell'analisi tessiturale dei sedimenti per la ricerca dei parametri e degli indici sedimentologici necessari allo studio della deriva litoranea"; Atti del Convegno

Nazionale per la difesa del litorale di Chiavari, Lavagna e Sestri Levante dall'erosione marina, pp. 181-193 (1979).

- (7) G.C. CORTEMIGLIA, "Applicazione di curve di isodensità carbonatica per classi granulometriche modali nello studio della dinamica litorale"; Mem. Soc. Geol. It., 19, pp. 321-330 (1978,a).
- (8) G.C. CORTEMIGLIA, "Le modificazioni dell'assetto strutturale del litorale di Lavagna quale fattore erosivo della spiaggia"; Mem. Soc. Geol. It. 19, pp. 369-380 (1978,b).
- (9) G.C. CORTEMIGLIA, "I fattori dinamici dell'erosione sulla spiaggia di Cavi di Lavagna (Liguria orientale)"; Atti del Convegno Nazionale per la difesa del litorale di Chiavari, Lavagna e Sestri Levante dall'erosione marina, pp. 103-116 (1979).
- (10) B. LONG, "Le littoral Nord-Ouest de l'île de Ré (Charente Maritime). Le processus dynamiques de la sédimentation et l'évolution cotière résultante"; Thèse 3e Cycle, Univ. Toulouse III, pp. 1-236 (1975).
- (11) H. PAUC, "Le modes granulométriques et le phases de mise en place du recouvrement sédimentaire du plateau continental au sud de l'île du Levant"; Annales Hydrographiques, 5 (1), (1973).

CENERI VOLANTI ITALIANE PER LA PRODUZIONE DI CEMENTI

Nota di: Pietro Elio Abbaticchio

Giuseppe Baldassarre

Mario Petrella

Presentata dal socio: Prof. Riccardo Sersale

Adunanza del .09../.04./1988

Riassunto

Cementi di aggiunta ottenuti a partire dal clinker di Portland, gesso e ceneri volanti, provenienti da centrali termoelettriche italiane, sono stati valutati alla luce delle Norme di accettazione dei cementi pozzolanici.

Entrambe le ceneri, limitatamente alla percentuale utilizzata (20 - 40%), hanno dimostrato buone caratteristiche pozzolaniche. In particolare alle lunghe stagionature sono state ottenute resistenze meccaniche superiori a quelle del provino del solo cemento Portland usato come riferimento.

Abstracts

Blended cements obtained by mixing Portland clinker, gypsum and fly ashes from Italian power stations were evaluated on the basis of the Italian specifications for pozzolanic cements. Good pozzolanic characteristics are showed from both used ashes, in adopted percentage range (20 - 40%).

In particular, at long curing, higher mechanical resistance than that of reference, manufactured by Portland cement only, were obtained.

Introduzione

La crisi energetica degli anni settanta ha riproposto l'impiego massivo di combustibili solidi per il funzionamento di numerosi impianti.

L'utilizzazione di tali combustibili, con tecnologie di combustione più o meno avanzate, comporta la produzione di grandi quantitativi di ceneri volanti (CV) che per le centrali termoelettriche in servizio, ad esempio, possono ammontare a migliaia di tonn /giorno.

Si rende necessario pertanto individuare per dette CV impieghi utili al

ISTITUTO DI CHIMICA APPLICATA, FACOLTA' DI INGEGNERIA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI, Via Re David, 200 - 70125 BARI

loro smaltimento.

Una precedente nota riferisce degli studi e dei risultati a tal fine conseguiti nell'arco di alcuni decenni ed evidenzia numerose possibilità di impiego delle CV legate alle differenti caratteristiche che esse presentano in dipendenza della loro origine 1).

Una opportuna composizione chimica unitamente alla struttura vetrosa, ad esempio, conferiscono alle CV attività pozzolanica e/o attività idraulica, rendendole idonee per un significativo impiego nell'industria cementiera.

Attività pozzolanica

Il comportamento pozzolanico delle CV viene attribuito dal Peterson 2) alle vicissitudini termiche da esse subite (riscaldamento ad alte temperature e successiva tempra).

La composizione granulometrica appare particolarmente correlata all'attività pozzolanica delle CV 3).

In particolare la frazione 5-30 μ m sembra essere la più attiva, risultando per essa un maggior contenuto di CaO 4); contenuti maggiori di CaO consentono per altro l'utilizzazione delle CV come materiale ad attività idraulica, senza

1) Abbaticchio, P., Amicarelli, V., Petrella, M. Utilizzazione delle ceneri volanti. Atti Acc. Pugliese delle Scienze Vol. XXIII, p. 435 1985.

2) Peterson, N.C., O'Brien, J.J., Deveraux, G.E. Pozzolan nature of fly ashes. Eng. News, 71, 1334, 1914.

3) Ducreux, R., Jarrige, A. Quelques aspects de l'effet pouzzolanique en rapport avec les utilisations des cendres volantes. Sil. Ind., 27, p. 517 1962.

- Watt, J.O., Thorne, J.D. Composition and pozzolan properties of pulverized fuel ash I. J. Appl. Chem. 15, p. 585 1965.

- L.c. p. 595 1965.

- L.c. p. 443 1966.

- Kikas, V., Laul, I., Piksarv, E. State and prospects for using volatile ashes from Estonian kukersit shale in the production of binder materials. Izv Vyssh. Ucheb. Zaved. Strot. Arkhitekt., 17, 4 p. 94 (1974).

- Beretka, J., Brown, T. Properties and pozzolan behavior of Australian fly ash J. Aust. Ceram. Soc., 12 p. 13 1976.

- Beretka, J., Brown, T. The utilization of fly ash in building. J. Aust. Ceram. Soc., 13, p. 24 1977.

- Smith, M.A., Halliwell, F. Application of the BS4550 test for pozzolan cements to cements containing pulverized-fuel ashes - Mag. Conc. Res., 31, p. 159 1979.

4) Kikas, V., Laul, I., Piksark, E. L.c. a nota 3).

aggiunta di cemento o calce 5).

Un incremento dell'attività pozzolanica, alle stagionature più brevi, deriva poi, secondo Sipitanos ed altri, dalla macinazione delle CV, giacchè la conseguente rottura del guscio vetroso delle sferule accelera le reazioni CV-CaO 6).

Anche la composizione chimica influenza il comportamento pozzolanico delle CV.

Secondo Ostrowski 7) l'attività pozzolanica è funzione del contenuto di Al_2O_3 ed SiO_2 solubili; egli evidenzia anche una proporzionalità, rispettivamente diretta e inversa, con la percentuale di fase vetrosa e con il contenuto di incombusto.

Per Kurdowski l'attività pozzolanica aumenta con la percentuale di Al_2O_3 vetroso 8).

E' stata anche recentemente proposta una valutazione della pozzolanicità (P.P.I.) che può prevedere la reattività di una cenere con la calce, basato sul rapporto $\frac{K_2O}{Al_2O_3} \cdot 10$ che sembra direttamente correlato con la quantità di cenosfere vetrose 9).

Joshi infine, anche sulla scorta degli studi di altri ricercatori, nel ribadire l'importanza della storia termica, correla l'attività pozzolanica alla quantità ed alla composizione dello "strained glass" 10).

Tali indicazioni sono utile premessa alla comprensione della definizione, largamente condivisa, riportata da Sersale, secondo cui per attività pozzolanica delle CV si deve intendere quel fenomeno che determina la neoformazione di fasi suscettibili di manifestare una resistenza dopo indurimento, e che è

-
- 5) Ish Shalom, M., Voyatzaksy, E., Melidis, S.B. Cementing properties of oil-shale ash I. Effect of burning., J. Chem. Conc. Res., 10, p. 799 1980.
- Bentur, A. Application of oil-shale ash as a building material. Sil. Ind., 27, p. 163 1982.
- 6) Sipitanos, K.M., Voyatzakis E., Melidis, S.B. Etudes sur les cendres volantes des lignite grecs. Rev. Mat. Constr., 4, p.211, 1977.
- Han Qi Cheng, Osbaeck, B. Effect of fly ash grinding on the hydration and strenght development of fly ash cements, 8° Congress International de Quimica do Cimento, Vol. IV, 46 1986.
- 7) Ostrowski, C. Calcium hydroxide and pladter-their effects on pozzolanic properties of fly ash. Baustoffindustrie Aug. A., 19, p.13, 1976.
- 8) Kurdowski, W., Poleszak, N. Pozzolanic behavior of some fly ash. Tir. Tonid., Ztg., 102, p.696, 1978.
- 9) Hubbard, F.H., Dhir, R.K., Ellis, M.S. pulverized fuel ash from concrete: compositional characterization of United Kingdom PFA, Cem. Conc. Res., 15, p.185 1985.
- 10) Joshi, R.C. Sources of pozzolanic activity in fly ashes. A critical review. Fifth Int. Utiliz. Symp. Part. 2, p.610 1979.

causata dalla reazione della calce con i prodotti formati dall'attacco alcalino sui silicati acidi 11).

Per valutare tale attività pozzolanica, attualmente, non si ritengono sufficienti i soli saggi chimici e fisici, ma si richiede il conforto delle prove di resistenza meccanica su malte con l'inconveniente di tempi lunghi di attesa 12).

Gli sforzi dei ricercatori sono oggi volti alla messa a punto di metodi che hanno risposte più affidabili in tempi più brevi.

Nel tentativo di dare un nostro contributo alla risoluzione di tale problema, si è iniziata una ricerca su CV provenienti da centrali termoelettriche italiane con l'obiettivo da una parte di saggiarne la bontà quali materiali a carattere pozzolanico e dall'altra di mettere a punto, in alternativa, metodi che abbiano i requisiti di celerità ed affidabilità richiesti dall'utilizzatore.

Nella presente nota si riportano i risultati relativi alla prima parte della ricerca, cioè la caratterizzazione delle CV, e le prove eseguite, sui cementi di aggiunta, da essi ottenuti, secondo le Norme di accettazione per i cementi pozzolanici 13).

Materiali

Sono stati esaminati campioni di due differenti ceneri volanti CV₁ e CV₂.

Le osservazioni in microscopia elettronica a scansione, (fig. 1 e 2), mostrano la caratteristica struttura a sfere cave, parzialmente riempite da altre sfere, propria delle CV.

La stessa tecnica di indagine, in accordo con le curve granulometriche

-
- 11) Sersale, R. Structure et caractérisation des pouzzolanes et des cendres volantes. 7^e Congrès International de la Chimie des Ciments, Paris, Vol.I, IV, 1/3 1980.
- 12) Regourd, M. Ciment spéciaux et ciments avec additions. 8^e Congresso Internazionale de Química do Cimento, Vol.I, p.199 1986.
- 13) Norme sui requisiti di accettazione e modalità di prova dei cementi D.M. 3/6/1968 G.U. n. 180 del 17/7/1968.

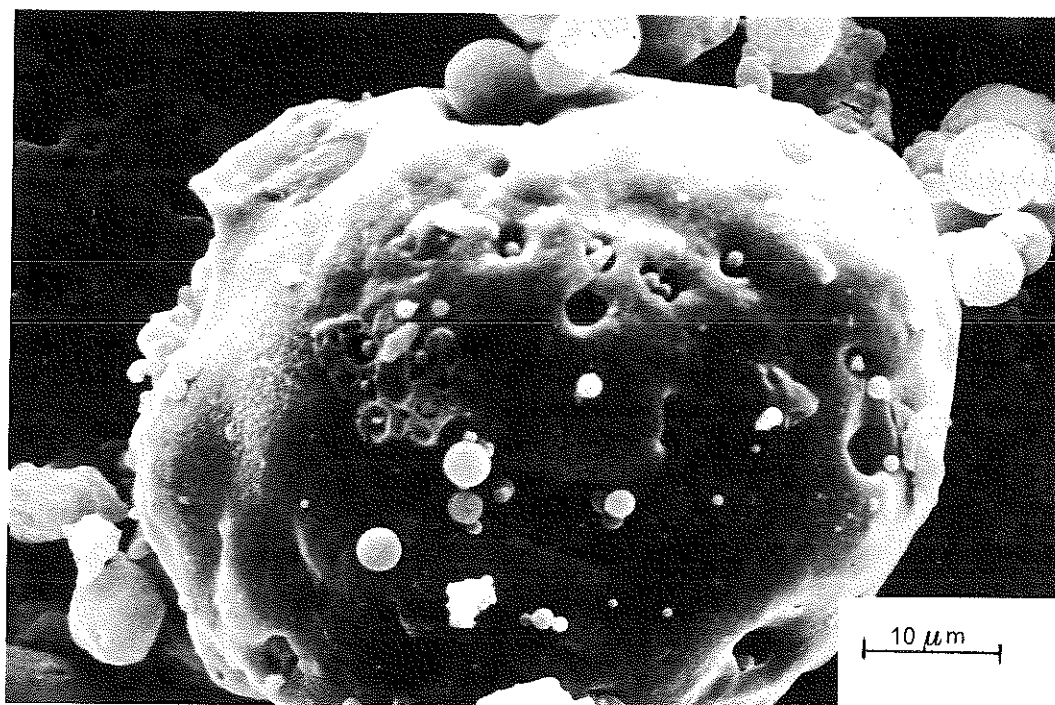


Fig. 1 - Particolare della cenere volante 1.

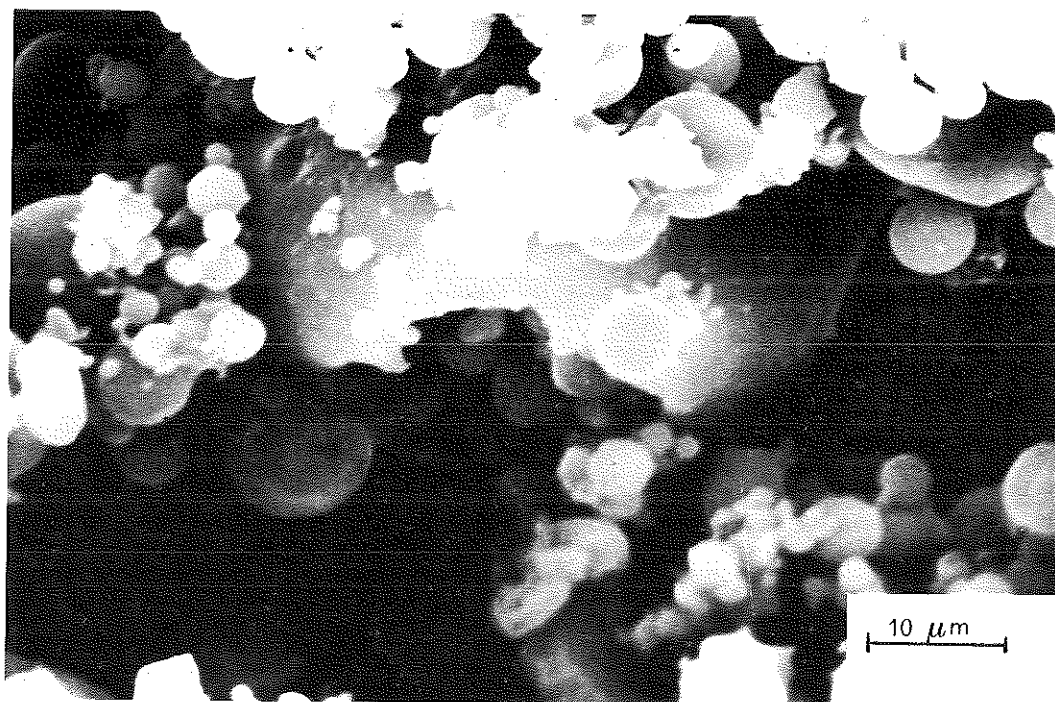


Fig. 2 - Particolare della cenere volante 2.

della fig. 3, indica un maggior contenuto di particelle fini per la CV₂ (fig. 4 e 5).

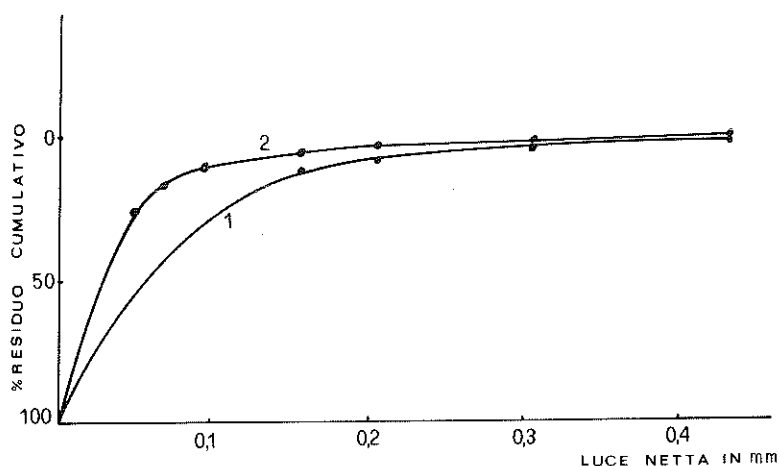


Fig. 3 - Curve granulometriche delle ceneri volanti

Significativamente, differenze fra i valori delle caratteristiche fisiche (densità, superficie specifica e granulometria) e composizione mineralogica sono evidenziate nella tab. I.

Tab. I - Caratteristiche fisiche e dati mineralogici

CV.	Densità (Kg/m ³)	Residuo (%) (a 45 µm)	Sup. Specif. Blaine (cm ² /g)	Area Superf. (cm ² /cm ³)	Fasi Cristalline (DRX)
1	1847	56	2650	4893	quarzo
2	2202	27	4120	9072	quarzo, mullite

Dalla composizione chimica riportata in tab. II, preponderante appare in ogni caso il tenore di SiO₂ ed Al₂O₃, mentre la più grande differenza si

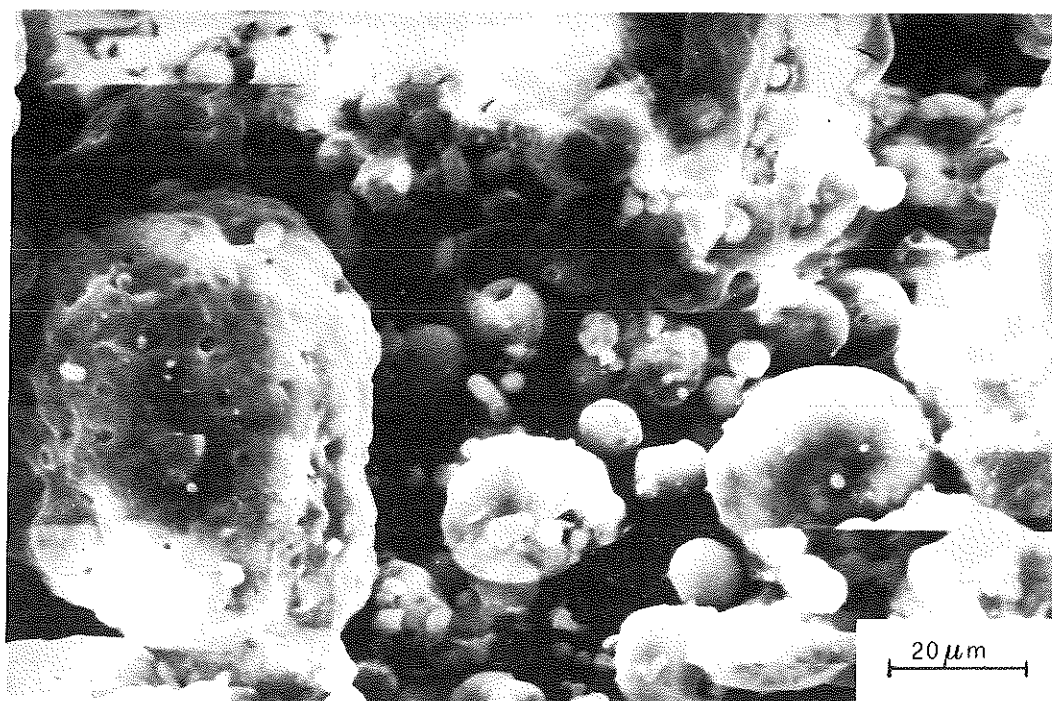


Fig. 4 - Cenere volante 1.

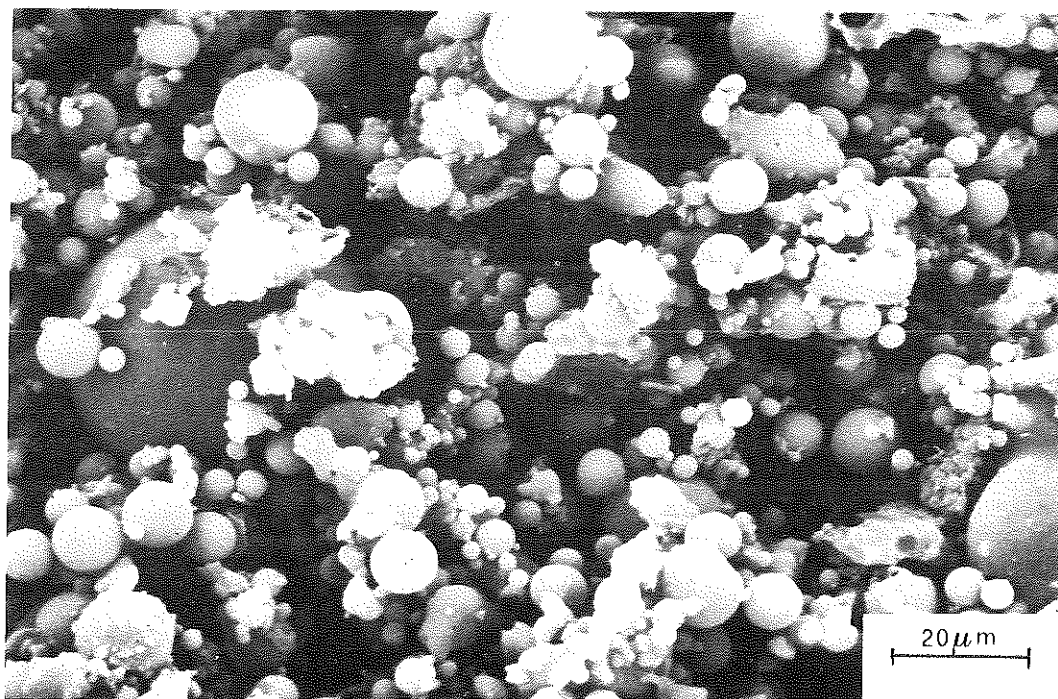


Fig. 5 - Cenere volante 2.

registra per il contenuto di incombusto (perdita al fuoco:) cui è peraltro lecito correlare il differente valore di residuo insolubile.

Tab. II - Analisi chimica delle CV (% in peso)

	CV 1	CV 2
SiO ₂	51.64	46.65
Al ₂ O ₃	24.84	26.90
Fe ₂ O ₃	9.25	4.65
CaO	3.35	6.60
MgO	3.45	1.45
Na ₂ O ₃	0.54	0.40
K ₂ O	2.30	1.55
TiO ₂	2.12	2.20
MnO	0.20	0.10
P ₂ O ₅	tracce	tracce
SO ₃	0.30	0.30
Perdita al fuoco	2.00	2.00
Residuo insolubile	30.50	36.30

Entrambe le ceneri presentano, in base al loro indice di potenziale pozzolanicità (P.P.I.) (0.9 per la CV₂ e 0.6 per la CV₁), una reattività media 14).

14) Ravina, D., Melha, P.K. Properties of fresh concrete containing large amounts of fly ash. J. Cem. Conc. Res., 16, 2, p.227 1986.

La tab. III riporta la composizione del cemento Portland utilizzato per confezionare i provini di cemento contenenti il 20, 30 e 40% di CV, senza ulteriore macinazione delle ceneri stesse.

Tab. III - Analisi chimica e composizione mineralogica del cemento Portland

	% in peso
SiO_2	21.13
Al_2O_3	5.01
Fe_2O_3	2.11
CaO	64.33
MgO	1.30
Na_2O	0.29
K_2O	0.61
SO_3	3.17
Perdita al fuoco	1.62
CaO libera	0.80

composizione secondo Bogue: $\text{C}_3\text{S} = 64.40$, $\text{C}_2\text{S} = 12.00$, $\text{C}_3\text{A} = 9.70$, $\text{C}_4\text{AF} = 6.40$,

$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O} = 6.80$.

Superficie specifica Blaine: $5980 \text{ cm}^2/\text{g}$

Sono stati così ottenuti i campioni A, B, C per la CV_1 e D, E e F per la CV_2 , tutti sottoposti alle prove chimiche e fisiche (tempi di presa, resistenza a compressione ed a flessione) previste dalle Norme dianzi menzionate.

Le prove fisiche sono state effettuate anche su malte di solo cemento Portland (testimone).

Risultati sperimentali

1. Prove chimiche

Tutti i provini confezionati soddisfano i requisiti delle Norme in base

ai valori di P.F., residuo insolubile, SO_3 , ed MgO riportati in tab. IV.

il saggio di pozzolanicità risulta positivo già a 8 giorni, con la sola eccezione del provino D, al 20% di CV_2 (fig. 6).

Tab. IV - Provini di cementi alle CV: analisi chimiche

	A	B	C	D	E	F
Perdita al fuoco	2.33	2.27	2.17	3.58	4.35	4.83
Residuo insolubile	4.39	6.97	9.70	5.57	8.69	11.81
SO_3	2.39	2.12	1.90	2.49	2.25	2.33
MgO	1.70	1.85	2.00	1.15	1.20	1.25

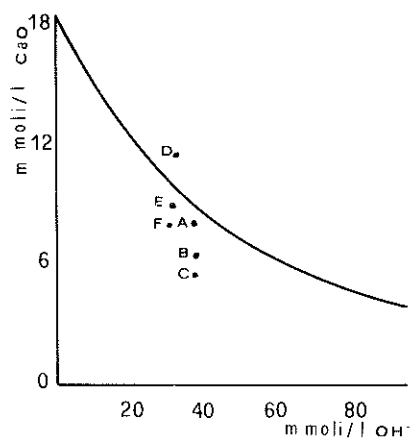


Fig. 6 - Solubilità di $(\text{CaOH})_2$ in presenza di alcali a 40°C.
Risultati del saggio di pozzolanicità.

2. Prove fisiche

2.1. Acqua di impasto

Tutti i provini hanno richiesto, per il confezionamento della pasta normale,

quantitativi di acqua maggiori di quella utilizzata per il testimone.

Le variazioni crescenti all'aumentare del contenuto di CV, vanno dal 12 al 27% c.a. ed appaiono indipendenti dalla diversa granulometria e dal differente contenuto di incombusto delle CV impiegate.

2.2. Tempi di presa

Tutti i campioni soddisfano per questa prova i requisiti previsti dalle Norme (Tab. V).

Come prevedibile, rispetto al testimone, inizio e fine della presa si verificano, in ogni caso, a tempi più lunghi.

I campioni A e D, più ricchi in clinker, hanno fra loro uguale tempo di inizio presa, mentre piccole differenze si registrano tra quelli contenenti analoghe percentuali delle due CV.

Il provino A presenta la fine presa ritardata rispetto al corrispondente D; il B ha i tempi di presa più brevi del corrispondente E. I campioni al 40% in cenere terminano entrambi la presa dopo 7 ore c.a.

Le variazioni dei tempi di presa tra le due serie non possono attribuirsi, nel nostro caso, a sensibili differenze del contenuto di alcali e solfati¹⁵⁾ ma semplicemente alla finezza di macinazione delle due ceneri.

2.3. Resistenza a compressione

Con riferimento al testimone, le resistenze a compressione a 28 giorni decrescono all'aumentare del contenuto di CV ed in maniera differente per i provini delle due serie, essendo 8, 20, 7, 15 e 29% il decremento rispettivamente misurato per i campioni B, C, D, E ed F.

Il campione A quasi eguaglia invece la resistenza al testimone.

A sei mesi si registrano in ogni caso valori superiori a quella del testimone con incrementi compresi fra il 20 ed il 9%.

A 12 mesi si registra un ulteriore incremento di resistenze meccaniche a compressione, ad esclusione del provino D che manifesta lo stesso valore misurato a 6 mesi.

15) L.c. in nota 14)

Tab. V - Risultati delle Prove Fisiche

	A	B	C	D	E	F	Testimone
Acqua di impasto %	32.0	34.2	36.3	33.0	34.3	36.9	28.5
Tempi di presa:							
inizio presa	h ^{3'03} ,	h ^{3'28} ,	h ^{4'23} ,	h ^{3'03} ,	h ^{3'58} ,	h ^{4'33} ,	h ^{2'08} ,
fine presa	h ^{5'13}	h ^{5'33}	h ^{6'43}	h ^{4'58} ,	h ^{5'48} ,	h ^{6'43} ,	h ^{3'58} ,
Compressione MPa							
3 giorni	24.2	20.6	15.7	25.5	21.0	15.2	20.9
7 giorni	35.1	29.0	23.0	35.0	29.0	22.0	38.7
14 giorni	45.0	40.1	30.0	44.0	38.2	31.3	48.0
28 giorni	53.4	50.0	43.7	51.0	46.2	38.8	54.3
6 mesi	79.2	78.2	76.0	79.0	77.0	72.0	66.3
1 anno	81.0	80.0	79.0	79.0	78.5	75.8	67.5
Flessione MPa							
3 giorni	5.2	4.2	3.3	5.1	4.2	3.4	5.5
7 giorni	6.2	5.3	4.7	6.0	5.3	4.5	6.4
14 giorni	6.9	6.5	5.6	6.9	6.4	5.4	7.3
28 giorni	8.5	7.6	6.7	7.9	7.1	6.8	8.3
6 mesi	9.8	8.8	8.2	9.4	9.1	8.6	9.3
1 anno	9.8	8.8	8.3	9.6	9.2	9.3	9.3

A questa stagionatura la resistenza del testimone rimane inferiore a quella di tutti i provini.

2.4. Resistenza a flessione

A 28 giorni i provini con il più basso contenuto di CV eguagliano il testimone, mentre per gli altri si misurano valori decrescenti all'aumentare del contenuto di cenere.

A 6 mesi i campioni A e D rivelano resistenze a flessione superiori rispettivamente del 5 e del 15% rispetto al testimone, mentre gli altri si attestano su valori inferiori.

A 12 mesi non si registrano incrementi sostanziali di resistenza, tranne per il provino F che eguaglia il testimone.

Discussione e conclusioni

Le miscele esaminate presentano le caratteristiche di buoni cementi pozzolanici; solo il provino D (40% di CV_2), pur avendo buone resistenze meccaniche, presenta un saggio di pozzolanicità negativo.

Nelle due serie di provini, le resistenze a compressione, decrescenti all'aumentare del contenuto di CV, tendono ad aumentare con la stagionatura.

I valori diversi delle resistenze meccaniche a 28 giorni per le due serie di provini, non concordano con le previsioni possibili in base alla diversa granulometria delle due ceneri, mentre sono in buon accordo con il rapporto

$$\frac{K_0}{Al_2O_3} \cdot 10 \quad (P.P.I.).$$

Resta così aperto il problema su quale test possa dare una risposta più affidabile in tempi brevi.

Si intende proseguire lo studio delle ceneri volanti al fine di correlare significativamente ed in tempi brevi la loro attività pozzolanica con la quantità e la qualità della frazione vetrosa.

STUDIO GEOCHIMICO SUL SISTEMA IDROTERMALE DEI CAMPI FLEGREI (CAMPANIA, ITALIA)

Nota di Maria Rosaria Ghiara^o e Damiano Stanzione^o

Presentata dal Socio Bruno D'Argenio
Adunanza del 16/04/1988

RIASSUNTO

In questo lavoro vengono presentati e discussi i risultati di uno studio geochimico condotto sulle acque di alcuni pozzi e sorgenti dell'area flegrea. Le osservazioni sono state effettuate dal maggio 1983 al dicembre 1985, periodo in cui era in atto il noto fenomeno bradisismico che ha coinvolto un'area di circa 6 Km di raggio coincidente con la caldera flegrea. Sui campioni, prelevati mensilmente, sono state effettuate indagini chimiche, chimico-fisiche e isotopiche che hanno permesso di individuare quattro principali tipi di acque che a loro volta hanno dato origine ad acque caratterizzate da un chimismo intermedio in funzione del vario grado di mescolamento. Le caratteristiche principali delle acque flegree non si sono particolarmente modificate nel tempo, anche se durante il fenomeno bradisismico si sono osservate forti variazioni di alcuni parametri. Si è inoltre notato che durante il bradisismo del 1970, si sono registrati valori più alti delle temperature all'emergenza, maggiori contenuti in silice e in sali totali disciolti, rispetto ai valori ottenuti durante la crisi del 1982, indicando quindi che in quest'ultima crisi, si è avuto un minor aumento dell'energia termica nell'acquifero profondo. La spiccata termalità dell'area flegrea, favorisce l'interazione delle acque con le rocce del serbatoio, e ciò è evidenziato anche dai valori isotopici dell'ossigeno, mentre i valori del δD sono confrontabili con quelli delle acque meteoriche della zona, ad eccezione di tre campioni che risentono di particolari situazioni locali. Sono stati quindi studiati, calcolando le attività delle varie specie ioniche, gli equilibri chimici che controllano le reazioni che si determinano durante l'interazione acqua-roccia. In base ai dati ottenuti risulta che le acque termali flegree sono in equilibrio con Mg-clorite, Na-montmorillonite, illite, adularia, microclino e albite, minerali neogenici rinvenuti sia nelle perforazioni effettuate nell'area sia nelle fratture che mettono in comunicazione la zona più profonda del sistema geotermico con quella più superficiale. Dette fasi sono state riscontrate anche in studi sperimentali di interazione acqua-vetro vulcanico flegreo a 200°C. Infine si è osservato che le acque termali flegree, pur presentando diverse caratteristiche chimiche e chimico-fisiche, in relazione ai differenziati apporti di fluidi profondi provenienti dalla zona fillitico-propilitica lungo fratture subverticali, tendono tutte a raggiungere l'equilibrio con minerali idrotermali quali microclino e albite a temperature fra i 150 e i 200°C, indicando quindi, una circolazione che si sviluppa nella parte alta del sistema geotermico flegreo.

ABSTRACT

The result of geochemical investigations about the waters of some springs and wells of the Phlaegraean Fields area are presented and discussed in this study. The observations have been carried out since may 1983 until december 1985. During this period was active the well-known bradyseismic phenomenon which involved an area, coinciding with the Phlaegraean caldera, within a range of 6 Kms. The chemical, physico-chemical and isotopical researches carried on samples taken at a monthly interval, have allowed us to single out four main kinds of water which, in turn, have originated other kinds of waters, characterized by an intermediate chemistry depending on the different mingling degree.

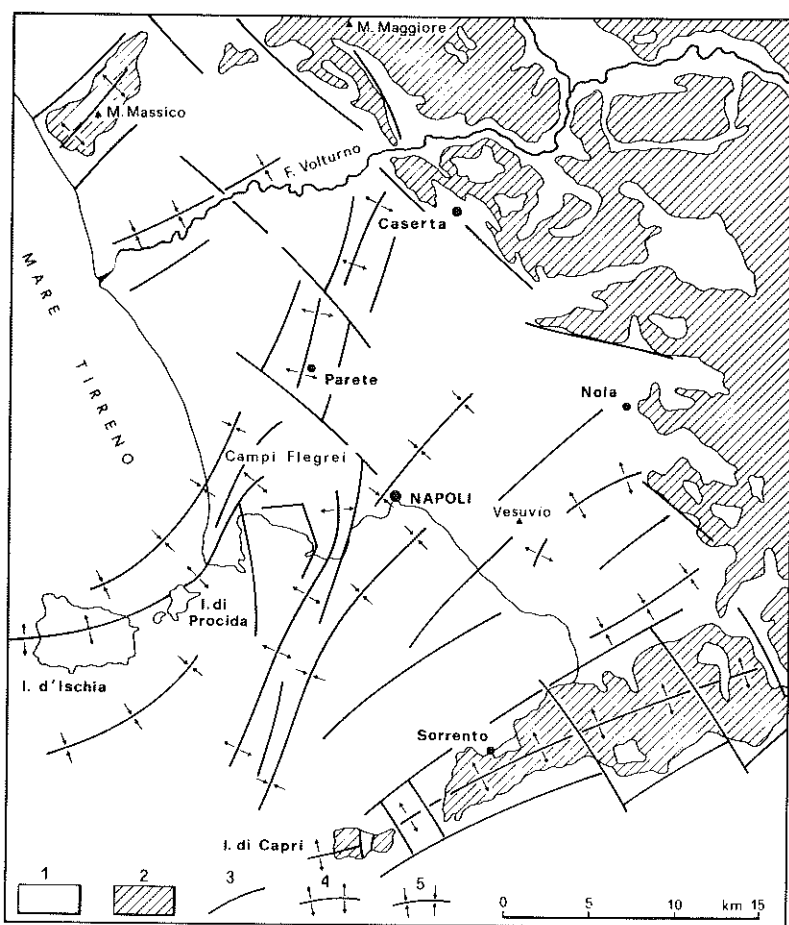
^o)Dipartimento di Scienze della Terra, Via Mezzocannone 8, Università degli Studi di Napoli

^{*)}Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. (G.N.V.) e del M.P.I. 60%.

Time has not modified the main characteristics of Phlaeagraean waters, even if there strong variations in several parameters during the bradyseismic activity have been recorded. It has furthermore been observed that the temperature values of the emergent water as well as silica and TDS contents, which had been recorded during the 1970 bradyseism, were higher than the ones obtained during the 1982 crisis. This could mean, therefore, that in the latter crisis there has been a lower increase in thermal energy in the deep aquifer. The marked termality of the Phlaeagraean area is favourable to water-rock interaction in the reservoir; this is also clearly evidenced by the oxygen isotopic data whereas the δD values are comparable with those of the meteoric waters (with the exception of three sample owing their different values to some local accident). Chemical balances controlling the water-rock interactions have been investigated way of calculating the ionic activities. By the presented data it results that the Phlaeagraean thermal waters are in balance with Mg-Clorite, Na-Montmorillonite, Illite, Adularia, Microcline and Albite, these being authigenous minerals found both in some drill cores from the same area and in the fractures connecting the deepest and more superficial parts of the geothermal system. The mentioned minerals have also been encountered during experimental studies on the water-Phlaeagraean volcanic glasses interaction at temperatures of 200°C. Lastly, it as been observed that Phlaeagraean thermal waters, even if they present differentiated chemical and chemico-physical characteristics, owing to the variable effects on them of the deep fluids originated from phyllitico-propilitic zone and reaching lower depths through subvertical fractures, tend to reach the equilibrium with hydrothermal minerals such as Microcline and Albite at temperatures between 150 and 200°C. This fact is indicative therefore, for a circulation developing in the upper zones of the Phlaeagraean geothermal system.

INTRODUZIONE

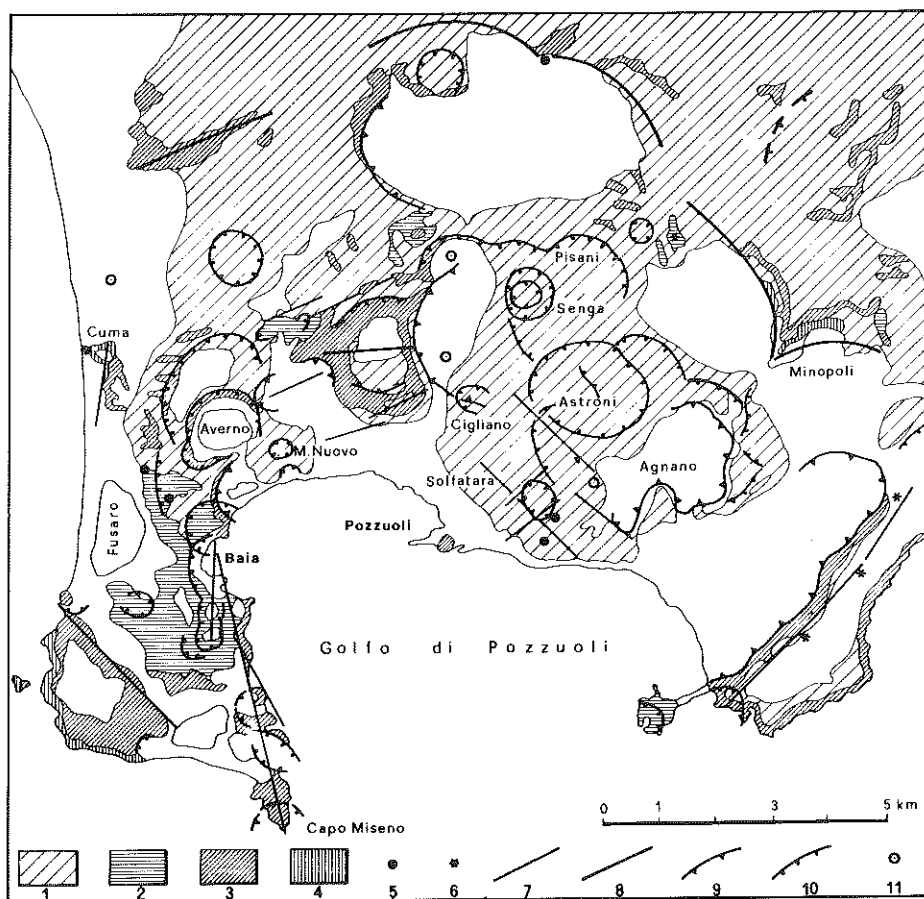
La Campania è sede di aree di vulcanismo quaternario attivo (CAPALDI et al., 1985) localizzate lungo il margine tirrenico della catena appenninica, in una zona limitata da sistemi di faglie ad andamento NW-SE e NE-SW (tav.1). In particolare, l'area flegrea presenta un assetto stratigrafico legato alle complesse fenomenologie vulcano-tettoniche e sedimentarie che si sono succedute nel tempo. La stratigrafia del sottosuolo è molto diversificata, la parte superiore della sequenza litostratigrafica è composta da rocce vulcaniche sottoposte a processi di alterazione idrotermale con conseguente argillificazione; queste rocce agiscono da copertura impermeabile mentre le formazioni più profonde, rappresentate da alternanze di lave fratturate e tufi, hanno caratteristiche tali da costituire un serbatoio. Si ha, quindi, una struttura idrogeologica complessa nella quale la circolazione idrica sotterranea avviene per falde sovrapposte che possono essere ricondotte ad un'unica falda per la mancanza di veri e propri impermeabili (CELICO et al., 1987). Inoltre tali autori ritengono che l'area flegrea non può essere alimentata lateralmente dagli acquiferi circostanti e suggeriscono un'alimentazione aggiuntiva proveniente dal substrato profondo probabilmente collegato ai massicci carbonatici che



Tav. 1 - Principali caratteri strutturali della Campania occidentale. 1) Alluvium, depositi vulcanici relativi all'attività dei Campi Flegrei s.l. e del Somma-Vesuvio. 2) Depositi sedimentari del Pleistocene-Pliocene-Miocene-Cretaceo superiore-Trias superiore formanti le unità Irpinidi, le unità Silicidi, l'unità di Monte Maggiore e dell'Alburno-Cervati rispettivamente. 3) Faglie dirette. 4) Strutture tipo horst. 5) Strutture tipo graben. (Da Di Girolamo et al., 1984).

bordano la Piana Campana (CAMELI et al., 1975). Ulteriori complicazioni sono imputabili al galleggiamento della falda dolce su acqua marina di ingressione continentale e dai possibili mescolamenti che risentono della presenza di moti convettivi che si determinano in aree caratterizzate da spiccata termalità (CELICO et al., 1987; CORNIELLO e NICOTERA, 1982).

La struttura principale dei Campi Flegrei è rappresentata da una caldera di circa 12 Km di diametro formatasi circa 35000 anni fa per un collassamento dopo l'eruzione dell'Ignimbrite Campana (BERBERI et al., 1978; DI GIROLAMO et al., 1984) (tav.2). In essa



Tav. 2 - Sketch-map vulcanologica dei Campi Flegrei (da Barberi et al., 1984). 1) Attività subaerea recente post-calderica (fase D ed E: 4500 anni-1538 d.C.). 2) Attività principalmente subaerea antica post-calderica (fase C: 10500-8000 anni). 3) Attività principalmente sottomarina post-calderica (fase B, Tufi gialli: 35000-10000 anni). 4) Attività pre-calderica ed Ignimbrite Campana (fase A: più di 35000 anni). 5) Duomi di lava. 6) Centri eruttivi ipotizzati. 7) Faglie e fratture. 8) Bordo della caldera flegrea. 9) Collassi vulcano-tettonici post-calderici. 10) Crateri. 11) Pozzi geotermici.

sono presenti manifestazioni vulcaniche quali emanazioni gassose, sorgenti termali e vistosi movimenti verticali del suolo. Per le caratteristiche geologiche, nonché per l'intensa urbanizzazione, i Campi Flegrei sono oggetto di numerosi studi finalizzati al rischio vulcanico. Tali studi hanno messo in evidenza che, nel tempo, i centri eruttivi si sono concentrati nell'area centrale della caldera, e che le molteplici eruzioni vulcaniche si sono succedute con energie sempre più modeste intervallate da periodi di relativa calma (ARMIENTI et al., 1983; ROSI et al., 1983; ARMIENTI et al., 1984; DI GIROLAMO et al., 1984). E' stato possibile, quindi, formulare l'ipotesi di una camera magmatica alimenta-

trice, chiusa verso il basso, che è andata riducendosi nel tempo. La posizione di detta camera magmatica, il cui centro è stato localizzato sotto la cittadina di Pozzuoli (CORRADO et al., 1976), dovrebbe trovarsi ad una profondità compresa tra i 4 ed i 5 Km come suggerito dal metamorfismo di contatto riscontrato nelle rocce e dalle alte temperature (420 gradi centigradi) misurate nei pozzi geotermici profondi circa 3000 metri (BRUNI et al., 1983).

In tale contesto vulcanologico si inquadra il fenomeno bradisismico flegreo che è stato oggetto di attenti studi sin dalla metà del XIX secolo (CAPACCI, 1835; LYELL, 1846; NICCOLINI, 1846; GUNTER, 1903). Un'accurata descrizione dei moti del suolo flegreo, negli ultimi 2000 anni, è stata effettuata da PARASCANDOLA (1947) (fig.1). Da tale ricostruzione e dai dati di CORRADO et al. (1976), risultano 12 secoli di "bradisismo discendente" durante i quali non si hanno testimonianze di eventi vulcanici, e 6 secoli di sollevamento durante i quali si sono verificati tre eventi vulcanici: eruzione della Solfatara del 1198, eruzione dell'Arso del 1301-1302 e l'eruzione di Monte Nuovo del 1538, recentemente studiata anche da DI VITO et al. (1987).

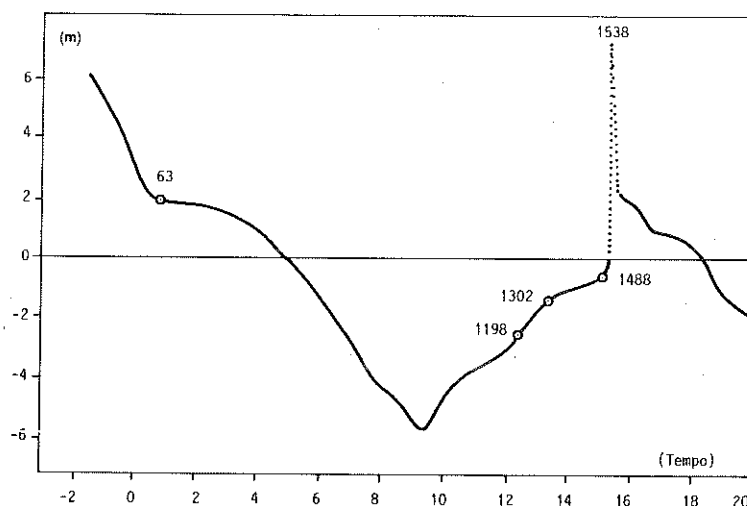


Fig. 1 - Grafico dei moti del suolo al Serapeo dal II secolo a.C. a oggi (PARASCANDOLA, 1947).

La causa del sollevamento del suolo è individuata secondo il modello di Mogi (1958), in una spinta causata da un corpo magmatico in espansione posto ad una profondità non eccessivamente elevata, mentre altri ricercatori (OLIVERI DEL CASTILLO e QUAGLIARIELLO, 1969; OLIVERI DEL CASTILLO e MONTAGNA, 1984) ritengono che tale sollevamento è dovuto alla variazione della pressione del fluido di poro che impregna gli strati porosi e

permeabili delle rocce vulcaniche presenti. Tale variazione è connessa alla diversa velocità dei moti convettivi delle acque, legata a sua volta all'aumento della quantità di calore.

Una nuova fase di sollevamento, iniziata durante l'estate del 1982, ha interessato un'area di circa 6 Km di raggio coincidente con la caldera flegrea (BARBERI et al., 1984). Tale sollevamento è stato accompagnato da un'intensa attività sismica che si è concentrata prevalentemente nell'area compresa tra il Porto di Pozzuoli-la Solfatara-l'Accademia Aeronautica, area di massimo sollevamento come già si era verificato durante la crisi del 1969-1972 (LIVIERA ZUGGIANI, 1972). In seguito a quest'ultima potenziale crisi pre-eruttiva si è iniziata una campionatura sistematica di acque termali ricadenti fra Agnano e Baia al fine di evidenziare eventuali correlazioni fra il fenomeno bradisismico ed il comportamento geochimico degli elementi presenti in soluzione nelle acque e di portare un contributo alla conoscenza del sistema geotermico flegreo.

STUDI GEOCHIMICI SUI FLUIDI DEI CAMPI FLEGREI

Uno studio geochimico organico sui fluidi dell'area flegrea è stato effettuato da DALL'AGLIO et al. (1972) in conseguenza della crisi bradisismica del 1969-1972. Essi concludono che "le sorgenti calde emettono acque riscaldate per condensazione di vapore sotterraneo derivante da tipi di acque mature nelle quali la riduzione di nitriti e dei solfati è alquanto avanzata". BALDI et al. (1975) e CORTECCI et al. (1978), basandosi su dati chimici ed isotopici di fluidi termali, hanno suggerito che le acque termali flegree sono il risultato di processi di mixing tra la locale acqua meteorica e le acque di circolazione profonda di origine marina. Infine, ANTRODICCHIA et al. (1985) hanno sottolineato l'importanza di alcuni punti d'acqua termali che rappresentano dei naturali punti di efflusso degli acquiferi idrotermali e suggeriscono lo studio, attraverso il monitoraggio di alcuni parametri significativi in detti punti, per poter ottenere informazioni sullo stato dell'attività vulcanica.

Le ricerche finalizzate alla sorveglianza geochimica nell'area interessata dal bradisismo dell'82 hanno evidenziato che, nelle prime fasi del fenomeno, si è avuto un cambiamento della composizione chimica dei gas rispetto a quella ottenuta nel 1979

e nel 1980. Successivamente tali valori sono rimasti praticamente costanti e solo nel 1984 tendevano a riassumere i valori pre-crisi. Tali limitate variazioni chimiche sono state interpretate dai vari ricercatori (CARAPEZZA et al., 1984 a,b; CIONI et al., 1984; ITALIANO et al., 1984) come indicative di un sistema fumarolico alimentato da un acquifero geotermico la cui profondità è localizzata approssimativamente a 1500 metri, come indicano le perforazioni geotermiche effettuate nel comprensorio di Pozzuoli. MARTINI et al. (1984) hanno inoltre osservato un aumento di vapore d'acqua a temperatura costante ed hanno ipotizzato un aumento di calore nell'acquifero sulla base di un maggiore contenuto in H_2S rispetto alla CO_2 ed un incremento del rapporto H_2/CH_4 . Queste ultime variazioni potrebbero inoltre indicare anche l'esistenza di un contributo convettivo di gas magmatici. Infine, in base ai tenori in He registrati nel mese di settembre 1983 nell'area flegrea LOMBARDI et al. (1984) hanno ipotizzato l'apertura di fratture come conseguenza dell'intensa attività sismica. L'insieme dei dati geochimici raccolti durante l'ultima fase bradisismica ha indicato che nel sistema geotermico profondo si è avuto un iniziale aumento dell'energia termale, probabilmente accompagnato da un aumento di pressione, ma non si sono avuti evidenti indizi di movimenti ascendenti di magma.

LOCALIZZAZIONE DEI PUNTI DI PRELIEVO E DATI ANALITICI DELLE ACQUE FLEGREE

Sono state effettuate campionature mensili di acque profonde ricadenti nell'area compresa fra Agnano e Baia (tab.1) nel periodo maggio 1983 dicembre 1985. Le analisi chimiche e chimico-fisiche dei campioni (tab.2) sono state eseguite mediante metodologie concordate con il gruppo di lavoro di Geochimica afferente al progetto finalizzato Energetica sottoprogetto Energia Geotermica del CNR. L'accuratezza delle analisi è stata controllata con standards interlaboratorio. In particolare Na, K, Mg, Ca, Li, Sr, Rb, (precisione 3%) sono stati determinati in spettrofotometria di assorbimento atomico (Perkin-Elmer mod. 370); Cl, HCO_3 , CO_2 , Ca, Mg (precisione 5%) mediante volumetria; NH_4 (precisione 3%) mediante potenziometria con elettrodo specifico (Orion mod. 407 e 901); Si (precisione 3%) in colorimetria; SO_4 (precisione 8%) con metodo turbidimetrico (Turner Design mod. 40-100). Le temperature all'emergenza sono state misurate con termometro a massima (precisione 0.2). I rapporti isotopici dell'ossigeno (precisione 0.2‰) e dell'idrogeno (precisione

Tabella 1: Localizzazione dei campioni di acque esaminate

- 1) Sorgente Terme di Agnano - prima polla di fronte al complesso termale. Località Agnano.
- 2) Pozzo Sprudel Terme di Agnano - profondità 38 metri. Località Agnano.
- 3) Sorgente Pisciarelli 1 - essiccata. Località Solfatara.
- 4) Sorgente Pisciarelli 2 - Località Solfatara.
- 5) Pozzo Hotel Tennis - profondità 75 metri. Località Pozzuoli.
- 6) Pozzo Parco Cuma - profondità 240 metri. Località Pozzuoli.
- 7) Pozzo Terme Lopez - campionatura interrotta per crollo. Località Pozzuoli Porto.
- 8) Pozzo Terme Puteolane - profondità 23 metri. Località Pozzuoli.
- 9) Pozzo Agrillo - località Pozzuoli Mercato.
- 10) Pozzo Damiani - profondità 38 metri. Località via Domiziana, omonimo complesso turistico.
- 11) Pozzo Terme Stufe di Nerone 1 - profondità 2 metri. Località Baia.
- 12) Pozzo Terme Stufe di Nerone 2 - profondità 1 metro. Località Baia.
- 13) Pozzo Papparone - località Giugliano.
- 14) Pozzo autoscuola - località Monte Ruscello.
- 15) Pozzo Monte Schiavi - località Quagliano-marano.
- 16) Pozzo Masseria Carandante - località Quarto.
- 17) Pozzo Lucrino - località Bacoli.
- 18) Pozzo Calcestruzzi - località Quarto.

1‰) sono stati misurati con lo spettrometro di massa dell'Istituto Internazionale di Ricerche Geotermiche del CNR in Pisa (tab. 3).

Le acque analizzate i cui tenori in salinità totale variano da 400 a 20000 mg/l, sono state suddivise in quattro tipi principali, sulla base di 6 parametri che tengono conto delle caratteristiche geologiche e idrogeologiche del bacino (D'AMORE et al., 1983; SAXENA E D'AMORE, 1985):

- a - acque caratterizzate da circuiti profondi, con salinità più elevate e con un chimismo clorurato sodico;
- b - acque circolanti in vulcaniti alcalino potassiche;
- c - acque provenienti da zone fagliate, con salinità più bassa e caratterizzate dalla

TABELLA 2 - Analisi chimiche delle acque flegree (composizioni espresse in meq/l)

CAMPIONI	DATA PRELIEVO	T ⁽¹⁾	pH ⁽²⁾	TDS ⁽³⁾	CO ₂ ⁽⁴⁾	NH ₄ ⁽⁴⁾	Na	K	Li ⁽⁴⁾	Rb ⁽⁴⁾	Ca	Mg	Sr ⁽⁴⁾	Cl	HCO ₃	SO ₄	SiO ₂ ⁽⁴⁾
1	12/83	47	6.5	3070	--	--	36.4	3.84	1.1	--	7.63	3.02	1.1	12.5	32.0	7.08	135
	12/84	47	7.1	3064	355	2.9	34.8	3.86	1.1	0.51	7.44	2.82	1.6	11.8	31.1	6.29	256
	12/85	42	7.1	2660	480	2.4	29.2	3.81	0.9	0.38	7.73	3.58	1.6	10.2	28.3	6.12	119
2	3/70	63	6.7	--	--	--	81.0	6.39	--	--	13.0	8.20	--	71.0	32.0	7.09	138
	12/84	59	6.9	--	--	--	89.6	7.98	1.4	1.2	12.7	6.14	4.4	88.9	19.7	7.39	148
	12/85	59	7.1	6758	298	3.9	84.6	8.13	1.3	1.2	13.0	6.02	4.3	85.5	20.0	7.58	150
3	12/83	40	6.5	4176	202	--	31.9	11.0	0.5	4.3	7.93	4.36	1.2	8.66	0.69	46.0	263
4	12/84	88	2.5	4116	2218	10.2	0.48	1.38	--	0.3	3.72	0.47	0.5	0.55	--	80.6	284
	12/85	82	2.5	3870	1810	9.6	0.47	1.32	--	0.2	3.69	0.47	0.6	0.62	0.02	70.8	292
5	12/83	78	7.3	3576	40	--	43.2	7.67	--	--	1.31	0.30	--	19.6	8.23	24.1	148
	12/84	79	7.2	3743	65	11.0	45.7	8.03	0.8	0.8	1.31	0.10	1.4	18.2	15.2	22.5	160
	12/85	81	7.1	3437	190	11.9	42.0	6.65	0.6	0.9	1.60	0.39	1.0	17.5	10.6	22.8	132
6	12/84	35	6.9	2140	473	ass.	14.0	4.35	0.4	0.1	11.7	4.03	2.6	14.2	12.0	8.08	105
	12/85	36	6.8	2325	615	ass.	17.0	4.55	0.4	0.2	11.9	4.52	2.4	16.4	13.0	7.79	110
7	9/83	20	7.0	593	--	--	2.75	0.92	--	--	4.52	1.61	--	1.32	7.92	0.57	67.3
8	3/70	60	6.9	10500	--	--	149.9	10.0	--	--	4.99	3.80	--	130.	18.9	25.0	126
	10/71	73	7.3	9222	--	--	122.7	8.90	--	--	2.52	3.13	--	89.7	21.0	20.7	143
	11/78	62	7.5	6700	--	1.9	92.0	7.90	1.1	--	2.0	1.40	1.4	47.0	36.0	27.0	114
	10/83	52	7.2	4372	250	0.4	65.2	4.73	--	--	1.81	1.70	--	28.9	36.9	8.33	80
	12/84	54	7.9	64.62	ass.	0.6	96.8	5.22	0.9	0.5	2.02	4.43	1.4	53.9	42.6	13.0	99.90
	12/85	54	7.1	5682	180	0.2	85.2	4.73	1.2	0.6	2.14	3.15	1.4	42.3	41.3	12.5	105
9	10/83	36	7.5	3523	70	0.1	43.5	1.11	--	--	6.94	6.13	--	31.0	9.82	16.5	74.20
10	4/70	50	6.9	1947	--	--	25.7	2.99	--	--	0.94	0.30	--	19.0	8.10	3.50	126
	11/78	49	6.6	3200	--	0.1	29.0	3.89	0.5	--	1.30	0.30	0.6	20.6	7.0	4.89	120
	10/79	46	7.5	2469	--	2.0	33.9	2.99	--	--	0.86	0.44	--	26.6	7.65	5.04	103
	6/82	41	7.5	3200	--	7.3	55.46	3.27	--	--	1.29	0.20	--	33.6	7.29	5.00	105
	12/83	45	7.1	2484	39	0.1	34.8	3.20	--	--	1.10	0.60	--	26.8	7.34	5.21	105
	12/84	45	6.9	2196	45	ass.	29.0	3.25	0.6	0.2	1.21	0.71	0.5	20.3	8.19	5.83	117
	12/85	45	7.0	2286	101	ass.	30.4	3.45	0.4	0.3	1.39	0.60	0.5	22.6	8.75	4.79	118
11	8/70	84	6.9	22901	--	7.0	349.7	5.29	--	--	18.0	9.21	--	380	2.20	9.99	162
	10/71	88	6.7	25232	--	20.1	394.7	7.88	--	--	19.2	6.59	--	410.9	0.80	13.2	174
	6/82	71	6.8	22222	--	6.4	348.0	5.24	--	--	15.9	7.32	--	358.4	8.46	10.7	127
	12/83	66	7.1	23906	--	--	361.0	7.93	8.8	2.0	18.5	16.3	9.0	383.6	8.24	15.7	120
	12/84	81	6.8	21463	115	4.8	304.5	8.44	7.5	1.7	15.5	15.2	6.0	329.5	6.72	13.1	109
	12/85	60	6.9	19656	191	4.0	304.5	6.14	7.2	1.8	13.5	12.0	6.0	317.3	4.26	10.3	110
12	4/70	80	7.8	23127	--	--	349.7	49.9	--	--	19.0	7.65	--	330	1.97	15.2	174
	10/71	73	6.7	21306	--	--	336.8	5.83	--	--	14.9	3.68	--	348	1.00	10.0	142
	6/82	68	6.6	21250	--	3.7	337.1	4.86	--	--	14.8	2.57	--	346.4	3.67	9.24	128
	12/83	71	7.2	22497	--	--	361.0	4.68	--	--	14.7	3.72	7.9	365.3	4.03	9.83	130
	12/84	73	6.9	19310	54	6.1	302.3	4.71	10.4	2.3	14.0	3.53	7.1	314.4	4.10	9.02	131
	12/85	74	6.9	21413	100	6.9	341.0	4.81	10.7	2.2	14.6	3.75	7.1	353.7	4.83	10.2	138
13	12/84	15	7.3	685	28	--	3.63	1.08	tr.	--	4.54	2.38	0.6	2.59	8.37	0.37	31.2
14	12/84	14	8.2	260	ass.	--	6.98	0.30	tr.	--	0.59	0.20	0.1	1.88	4.24	1.71	8.50
15	12/84	15	7.6	725	5	--	5.67	1.50	tr.	--	10.9	2.79	0.7	13.4	3.97	3.42	30.7
16	12/84	14	7.7	460	5	--	5.35	0.56	tr.	--	1.09	0.89	0.2	1.97	5.42	0.62	41.7
17	11/85	17	6.9	2114	49	0.1	24.36	2.23	0.4	--	6.59	2.38	0.7	22.3	9.11	4.85	44.4
18	11/85	21	7.1	563	61	0.1	2.61	0.97	--	--	4.19	0.82	0.5	1.64	4.85	2.12	55.4

1 = Temperatura all'emergenza espressa in °C.

2 = Misure effettuate a 25°C.

3 = Sali totali disciolti espressi in ppm.

4 = Concentrazioni espresse in ppm.

I dati analitici dei prelievi mensili sono riportati nei rapporti sulla Sorveglianza Geochimica dei Campi Flegrei del CNR (STANZIONE e GHIARA, 1984, 1985)

TABELLA 3 - Composizione isotopica delle acque flegree.

CAMPIONE	marzo 1984		novembre 1985
	δO^{18}	δD	δO^{18}
1	-5.4	-29	-5.4
2	-4.8	-26	-4.8
5	-1.6	-15	-0.8
6	-6.0	-32	-6.0
8	-5.8	-32	-5.6
9	-5.5	-30	--
10	-5.6	-31	-5.6
11	-1.3	-12	-2.7
12	-1.4	-12	-1.7
13	-6.5	-38	--
14	-5.9	-33	--
15	-5.6	-32	--
16	-6.1	-34	--

I dati sono riportati nella usuale notazione $\delta \% = (R_{\text{campiono}} - R_{\text{standard}}) / R_{\text{standard}} \times 1000$ dove $R = {}^{18}O / {}^{16}O$, D/H, lo standard è SMOW.

presenza, relativamente alta, di bicarbonati;

d - acque acide solfato-alcalino-terrose, con contenuti molto variabili dei diversi ioni e assenza di HCO_3 , il cui termalismo è legato alla risalita, attraverso condotti preferenziali, di fluidi profondi (WHITE, 1957; DE GENNARO et al., 1980).

e - acque con caratteristiche chimiche e chimico fisiche intermedie dovute al diverso grado di mescolamento tra i su elencati tipi di acque (fig.2).

Le differenti caratteristiche presentate dalle acque flegree che ricadono in un'area abbastanza limitata, si riflettono anche sui valori del rapporto Cl/Na che varia fra 0,27 e 1,14. In particolare, alcune presentano valori del rapporto Cl/Na vicino all'unità, mentre altre presentano valori decisamente più bassi (0,27-0,71). Quest'ultima caratteristica è mostrata anche dalle acque della Piana Costiera Meridionale di Israele (MAGARITZ et al., 1984), nelle quali l'arricchimento in Na è giustificato dallo scambio con i plagio-clasi e i minerali argillosi di depositi eolici presenti in tale area. Per la zona flegrea,

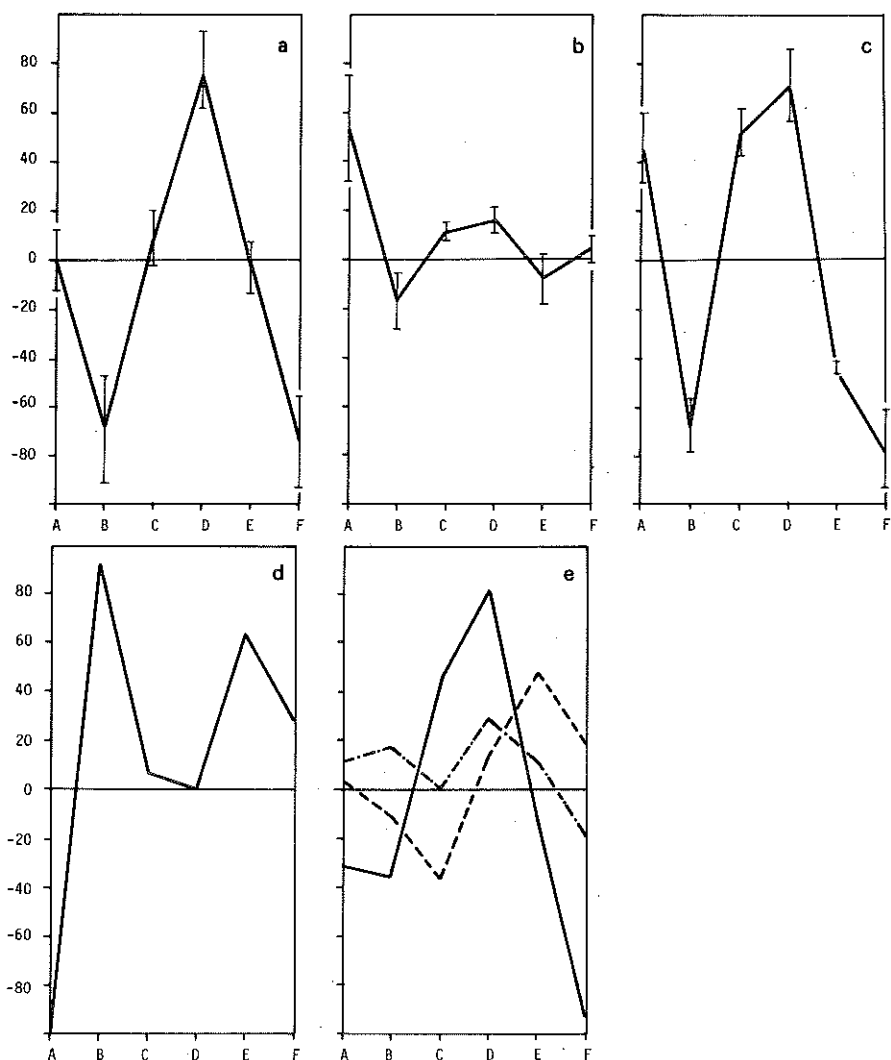


Fig. 2 - Rappresentazione in diagrammi rettangolari delle acque flegree sulla base dei parametri proposti da D'AMORE et al.(1983).

l'arricchimento in Na può essere imputato a processi di alterazione del vetro vulcanico. Infatti è stato evidenziato sperimentalmente che durante l'interazione acqua-vetro flegreo lo ione sodio si arricchisce nella soluzione di contatto (FRANCO et al.,1985; STANZIONE et al.,1986; STANZIONE et al.,1987). Fra tali acque ve ne sono alcune che presentano tenori relativamente alti di Na e Cl, anomali per acque circolanti in terreni di origine vulcanica, dove i solfati e gli ioni alcalino-terrosi hanno un ruolo caratterizzante, tali contenuti sono quindi da correlare principalmente ad un sistema idrotermale profondo ad alta temperatura. Inoltre, la notevole presenza di ioni bicarbonato, potrebbe in parte confermare la risalita di fluidi profondi con componente carbonatica suggerita

da BOLOGNESI et al.(1986), non escludendo comunque un apporto dovuto all'interazione con i plagioclasti (MICHARD et al.(1978) anche se tali minerali non sono particolarmente abbondanti nei prodotti flegrei. Infine, i valori moderati delle temperature all'emergenza e il contenuto relativamente basso in sali totali fanno supporre che i fluidi idrotermali hanno attraversato una falda freatica a più bassa temperatura analogamente a quanto osservato da BIGOT (1983) nel Nicaragua.

Quasi tutte le acque flegree esaminate, presentano un rapporto Mg/Ca minore dell'unità, mentre le acque costiere presentano generalmente un eccesso in ioni magnesio per ingressione di acqua di mare (MAGARITZ e KAFRI,1979). Inoltre, le acque clorurato alcaline flegree presentano anche tenori relativamente bassi in Mg, K ed SO_4 . Tale caratteristica è stata riscontrata in alcune acque termali costiere del Giappone (SAKAI e MATSUBAYA,1977). Studi sperimentali sui processi di interazione acqua di mare-roccia (BISCHOFF e DICKSON,1975 SEYFRIED e BISCHOFF,1979) hanno messo in evidenza una marcata riduzione del magnesio nella soluzione di contatto per la formazione di smectiti. Inoltre, in esperimenti di interazione acqua di mare-vetro trachitico flegreo si è avuta la cristallizzazione di minerali zeolitici e di un fillosilicato micaceo che giustifica la sottrazione dalla soluzione di contatto sia di ioni magnesio che di ioni potassio (STANZIONE et al.,1984). Le osservazioni protratte nel tempo hanno evidenziato che le caratteristiche principali delle acque flegree non sono cambiate anche se si sono registrate variazioni chimiche e chimico-fisiche durante il fenomeno bradisismico del 1982. In particolare le temperature all'emergenza hanno mostrato forti variazioni per tutto il periodo di osservazione (Fig. 3) anche se i valori massimi raggiunti nella fase di bradisismo discendente, sono risultati sempre inferiori ai valori massimi ottenuti in fase ascendente. Dal confronto con le misure effettuate durante il bradisismo del 1970 (DALL'AGLIO et al.,1972) risulta che, nella crisi del 1982 le temperature all'emergenza sono state sempre più basse. Anche i contenuti in SiO_2 (50-180 ppm) sono risultati inferiori del 25-30% e risultano sempre ben correlati con i valori delle temperature all'emergenza, indicando quindi per quest'ultima fase bradisismica temperature più basse nell'acquifero profondo. Una buona correlazione positiva è stata osservata anche fra le temperature all'emergenza e i contenuti in ammonio, litio e rubidio i cui valori rientrano perfettamente in quelli riportati per le acque

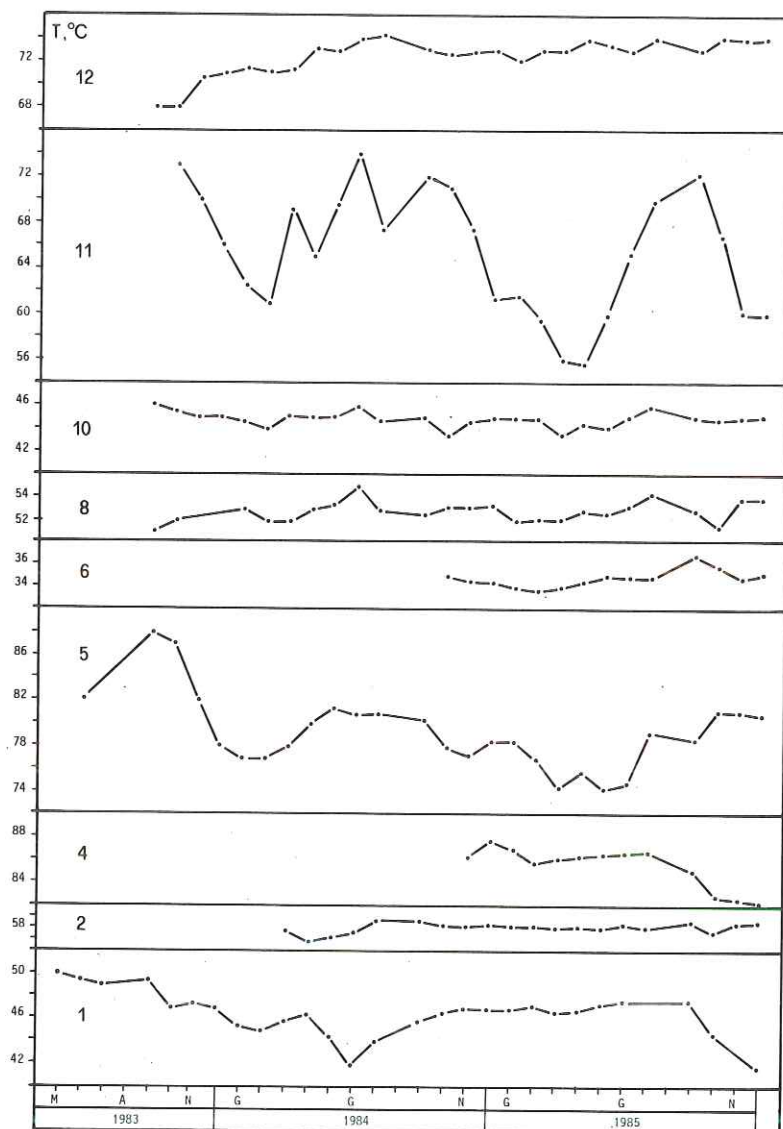


Fig. 3 - Variazioni dei valori delle temperature all'emergenza delle acque flegree in funzione del tempo (per le sigle dei campioni vedi tab. 1).

di aree geotermiche (ELLIS e MAHON,1964; MAHOD et al.,1983; DE GENNARO et al.,1984). In generale, durante il periodo di osservazione, non si sono notate particolari variazioni del contenuto in sali totali tranne che per i termini a più elevata salinità, per i quali si sono notati vistosi incrementi con andamenti ciclici (Fig. 4) da mettere in relazione ad apporti di una componente clorurato sodica.

Infine, molteplici fenomeni quali l'apporto di notevoli quantità di gas magmatici provenienti dal substrato, la presenza di acqua marina dovuta alla collocazione geografica

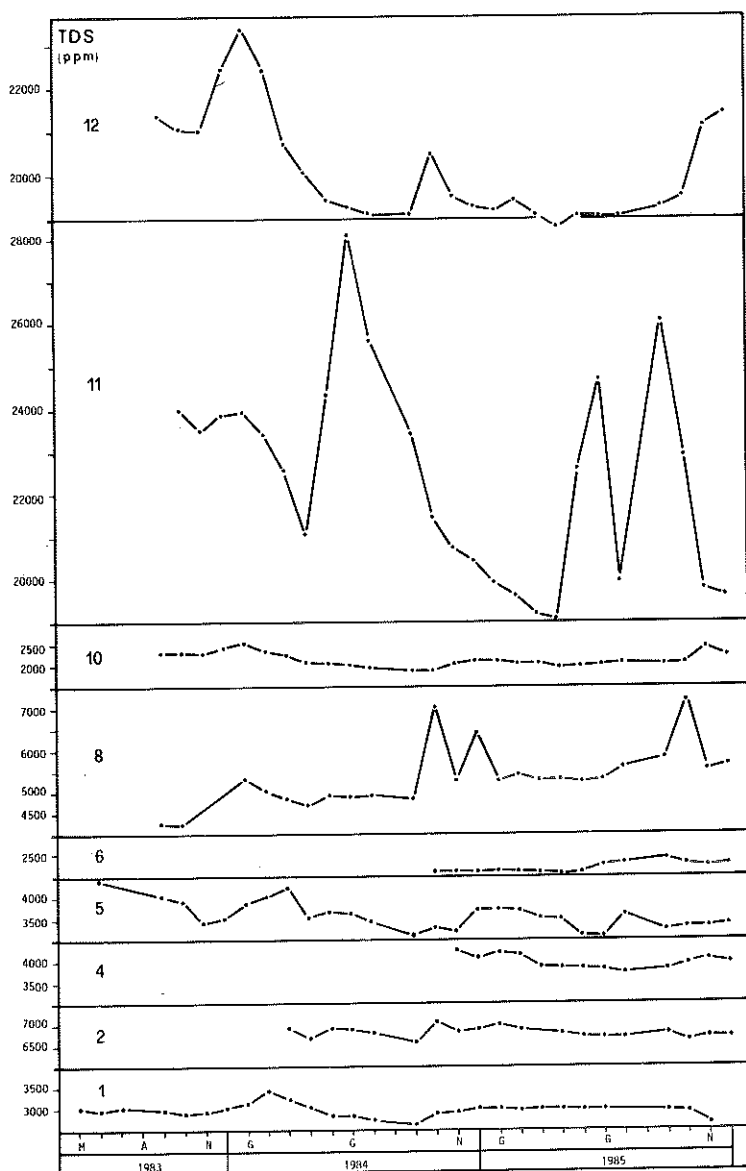


Fig. 4 - Variazioni dei contenuti in sali totali disciolti (TDS) nelle acque flegree in funzione del tempo (per le sigle dei campioni vedi tab. 1).

dell'area, l'intenso flusso di calore che determina fenomeni di evaporazione e successivamente di condensazione, l'interazione dei fluidi con le rocce dell'acquifero con conseguente cristallizzazione di minerali di neoformazione (D'AMORE e PANICHI, 1985), concorrono a modificare anche la composizione isotopica delle acque flegree rendendone non facile l'interpretazione. In particolare le acque esaminate presentano valori del $\delta^{18}O$ e del δD (tab.3) tali da farle cadere fra le due rette delle acque meteoriche riportate da

GRAIG (1961) e da GAT e CARMi (1970), ad eccezione dei campioni 5, 11 e 12 che presentano valori decisamente più positivi (fig.5). La positivizzazione dei valori del $\delta^{18}O$ è da attribuire anche allo scambio con la roccia, mentre quella del δD è dovuta ad apporti di acqua di mare per i campioni delle Stufe di Nerone (11 e 12) e a scambio isotopico con H_2S e/o a probabili fenomeni di evaporazione per le acque del pozzo Hotel Tennis. Tutti gli altri campioni presentano valori della composizione isotopica dell'Idrogeno confrontabili con quelli delle locali acque meteoriche (BALDI et al., 1975); CORTECCI et al., 1978) mentre si osserva, anche se in maniera poco marcata (Fig.5), lo "Shift" dell'ossigeno presente in tutte le aree geotermiche ad alta entalpia.

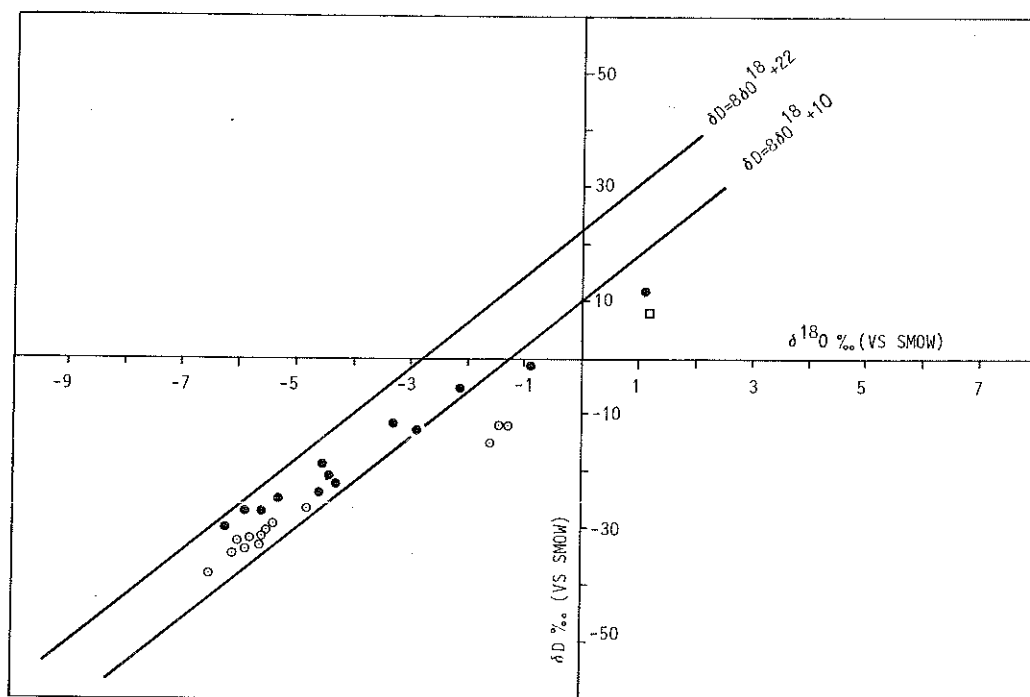


Fig. 5 - Diagramma $\delta D - \delta^{18}O$ delle acque profonde dei Campi Flegrei. ● Acque flegree campionate nell'aprile del 1971 (BALDI et al., 1975); ○ dati da tab.3; □ acqua di mare del golfo di Pozzuoli (BOLOGNESI et al., 1986); rette delle acque meteoriche secondo GRAIG (1961) che coincide con quella calcolata per l'area flegrea da BALDI et al. (1975) e secondo GAT e CARMi (1970).

Le perforazioni effettuate dall'Agip nell'area flegrea hanno messo in evidenza che il sistema idrotermale ha modificato notevolmente le paragenesi originarie delle rocce vulcaniche. In particolare, nella parte alta del sistema geotermico si sono riscontrate rocce argillificate e fillitizzate (zona Mofete primi 1000 metri, zona S. Vito primi 1500 metri) che rappresentano la copertura impermeabile (BRUNI et al., 1981). Nella parte più profonda, si ha la zona fillitico-propilitica che rappresenta la sede principale della circolazione termale (BRUNI et al., 1981, 1983; ANTRODICCHIA et al., 1985).

Le reazioni che si determinano durante l'interazione dei fluidi con le rocce controllate da equilibri chimici fluidi-minerali in relazione con le temperature (GIGGENBACH, 1980; ARNASSON, 1983; SAXENA e GUPTA, 1985, 1986). Sono state, quindi, calcolate le attività delle varie specie ioniche presenti nei fluidi flegrei (tab.4) usando il programma WATEQ di TRUESDELL e JONES (1974) e in particolare, per le soluzioni con valori della forza ionica maggiori di 0,1 è stata utilizzata l'equazione di DEVIES (1962), mentre per quelle con valori minori di 0,1 si è preferito usare l'equazione di Deby-Huckel (STUMM e MORGAN 1970). I valori ottenuti sono stati proiettati in diagrammi di attività scelti in base ai valori dell'attività della silice e del magnesio (HELGESON, 1969). Le acque risulterebbero (fig. 6a,b,c,d) quindi in equilibrio con Mg-clorite, Na-montmorillonite, illite, adularia, microclino e albite, minerali rinvenuti nelle perforazioni effettuate nell'area flegrea. Nella zona Mofete, alla profondità di 300-850 metri sono stati rinvenuti minerali quali montmorillonite, zeoliti, calcite, illite, clorite (BRUNI et al., 1981, 1983). Infine, negli esperimenti di interazione acqua-vetro vulcanico flegreo a 200 gradi centigradi (STANZIONE et al., 1986; FRANCO et al., 1987) si sono riprodotti gli stessi equilibri rinvenuti in natura. In tali esperimenti si è anche osservato che, con il tempo, le fasi termodinamicamente meno stabili, come zeoliti e minerali argillosi, tendono progressivamente ad essere sostituite da fasi più stabili, raggiungendosi un equilibrio soluzione-feldspato. Anche le acque termali flegree mostrano chiaramente questa tendenza (fig.7) raggiungendo, per temperature di 150-200 gradi centigradi l'equilibrio con il microclino e albite.

TABELLA 4 - Forza ionica, rapporti di attività e attività della silice nelle acque flegree.

Campione	Forza Ionica	$\log a\text{Na}^+ / a\text{H}^+$	$\log a\text{K}^+ / a\text{H}^+$	$\log a\text{Ca}^{2+} / a\text{H}_2$	$\log a\text{Mg}^{2+} / a\text{H}_2$	$-\log a\text{H}_4\text{SiO}_4$
1 1983	0.06	4.97	3.99	10.2	9.81	-2.65
1984	0.06	5.55	4.60	11.4	11.00	-2.37
1985	0.05	5.48	4.59	11.4	11.10	-2.70
2 1970	0.12	5.49	4.39	10.8	10.60	-2.64
1984	0.13	5.74	4.69	11.1	10.80	-2.61
1985	0.13	5.91	4.90	11.6	11.20	-2.60
3 1983	0.08	4.90	4.44	10.2	9.93	-2.36
4 1984	0.09	-0.92	-0.46	1.86	0.96	-2.33
1985	0.08	-0.93	-0.48	1.87	0.98	-2.31
5 1983	0.06	5.84	5.09	11.0	10.40	-2.61
1984	0.07	5.76	5.01	10.9	9.71	-2.57
1985	0.06	5.63	4.83	10.7	10.10	-2.66
6 1984	0.04	4.96	4.46	11.2	10.80	-2.76
1985	0.04	4.94	4.37	11.0	10.60	-2.74
7 1983	0.01	4.39	3.91	11.1	10.70	-2.95
8 1970	0.18	5.95	4.77	10.7	10.60	-2.68
1971	0.15	6.27	5.13	11.2	11.30	-2.62
1978	0.12	6.35	5.28	11.6	11.40	-2.72
1983	0.08	5.91	4.77	11.0	10.90	-2.88
1984	0.12	6.77	5.51	12.3	12.70	-2.79
1985	0.10	5.92	4.67	10.8	11.00	-2.76
9 1983	0.07	6.04	4.45	12.1	12.10	-2.91
10 1970	0.03	5.24	4.30	10.2	9.69	-2.68
1978	0.04	4.99	4.11	9.71	9.07	-2.70
1979	0.04	5.95	4.90	11.3	11.00	-2.77
1982	0.06	6.15	4.93	11.4	10.60	-2.76
1983	0.04	5.56	4.52	10.6	10.30	-2.76
1984	0.04	5.28	4.33	10.3	10.00	-2.71
1985	0.04	5.41	4.46	10.6	10.10	-2.71
11 1970	0.41	6.31	4.49	11.2	10.90	-2.57
1971	0.44	6.16	4.46	10.9	10.30	-2.54
1982	0.39	6.20	4.38	11.0	10.60	-2.67
1983	0.43	6.52	4.86	11.6	11.60	-2.70
1984	0.37	6.15	4.59	10.9	10.90	-2.74
1985	0.35	6.25	4.55	11.1	11.00	-2.74
12 1970	0.41	7.21	6.36	13.0	12.60	-2.54
1971	0.37	6.09	4.33	10.7	10.10	-2.62
1982	0.37	5.99	4.15	10.5	9.75	-2.67
1983	0.40	6.62	4.73	11.7	11.10	-2.66
1984	0.34	6.24	4.44	11.1	10.50	-2.66
1985	0.34	6.30	4.45	11.1	10.50	-2.64
13 1984	0.01	4.81	4.28	11.7	11.50	-3.28
14 1984	0.01	5.99	4.63	12.7	12.20	-3.85
15 1984	0.03	5.28	4.71	12.7	12.10	-3.29
16 1984	0.01	5.38	4.40	12.0	11.90	-3.16
17 1984	0.04	5.21	4.17	11.0	10.50	-3.13
18 1984	0.01	4.47	4.04	11.3	10.60	-3.03

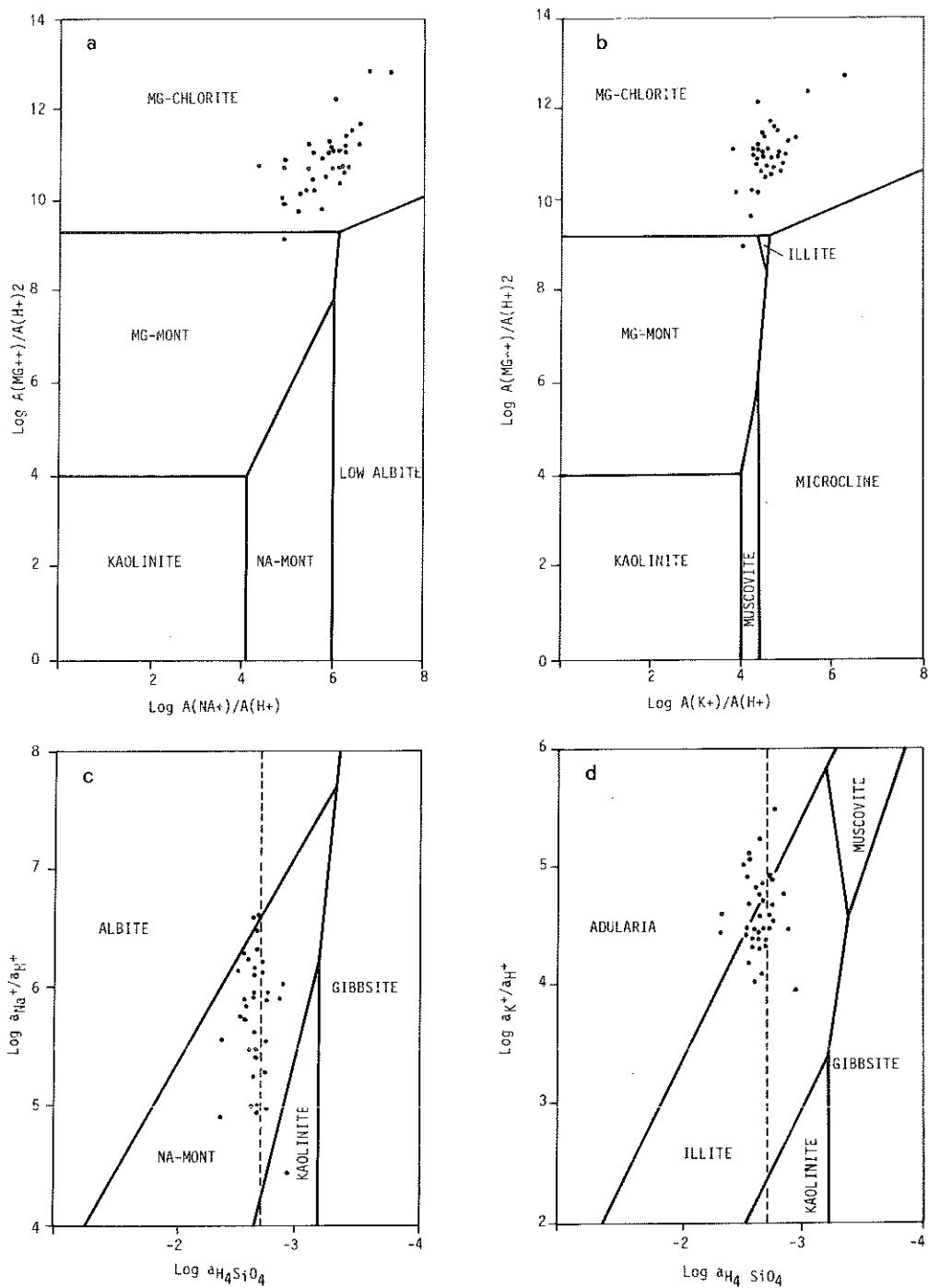


Fig. 6 - a) Sistema $\text{HCl-H}_2\text{O-Al}_2\text{O}_3\text{-CO}_2\text{-MgO-Na}_2\text{O-SiO}_2$ a 150°C ; $\log a_{\text{H}_4\text{SiO}_4} = -2.67$

b) Sistema $\text{HCl-H}_2\text{O-Al}_2\text{O}_3\text{-CO}_2\text{-MgO-K}_2\text{O-SiO}_2$ a 150°C ; $\log a_{\text{H}_4\text{SiO}_4} = -2.67$

c) Sistema $\text{MgO-Na}_2\text{O-Al}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2\text{-H}_2\text{O}$ a 150°C ; $\log a_{\text{Mg}^{++}}/a_{\text{H}^+} = 11.1$

d) Sistema $\text{MgO-K}_2\text{O-Al}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2\text{-H}_2\text{O}$ a 150°C ; $\log a_{\text{Mg}^{++}}/a_{\text{H}^+} = 11.1$

CONCLUSIONI

Le caratteristiche geologico-strutturali dei Campi Flegrei, la presenza di un vulcanismo attivo e di fenomeni bradisismici che interessano tutta la caldera flegrea, determinano una situazione idrogeologica complessa. Le perforazioni effettuate dall'AGIP hanno infatti messo in evidenza la presenza di più acquiferi a diversa profondità, caratterizzati da salinità e temperature differenti (CARELLA e GUGLIELMINETTI, 1983). Inoltre è stato evidenziato che le temperature profonde variano anche da zona a zona in relazione alle diverse situazioni strutturali (BRUNI et al., 1981, 1983). Questa complessità si riflette anche sulle acque che pur circolando in un'area abbastanza limitata presentano differenti chimismi. Infatti si possono distinguere quattro tipi principali di acquiferi che a loro volta danno origine per diverso grado di mescolamento ad acque a caratteristiche chimiche e chimico-fisiche intermedie.

Lo studio geochimico effettuato su tali acque ha evidenziato che, nel tempo, le caratteristiche principali non hanno subito modifiche pur registrando, durante la crisi

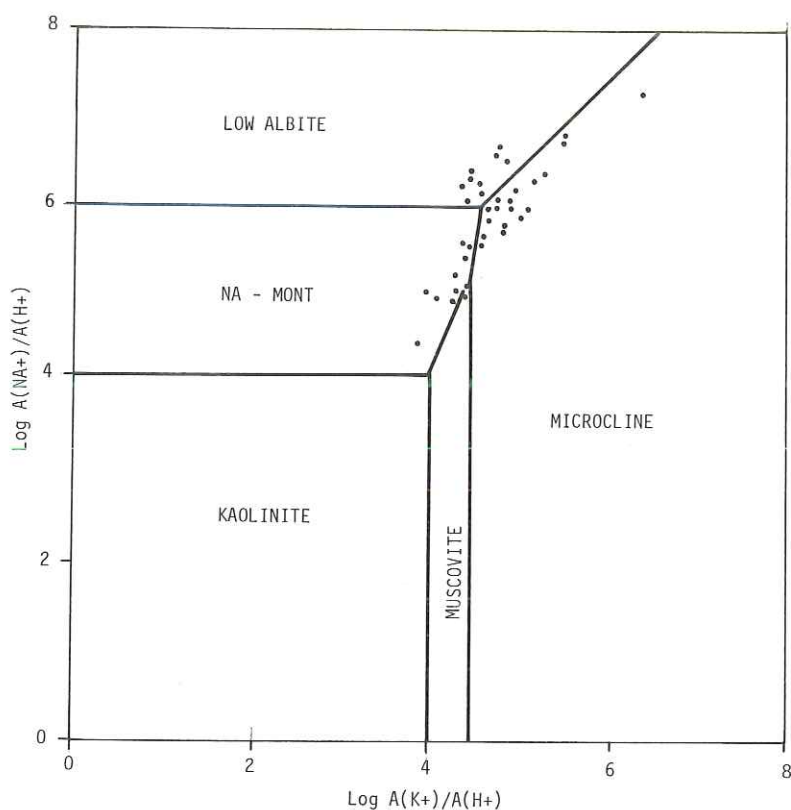


Fig. 7 - Sistema $\text{HCl-Al}_2\text{O}_3\text{-H}_2\text{O-K}_2\text{O-Na}_2\text{O-SiO}_2$ a 150°C ; $\log a_{\text{H}_4\text{SiO}_4} = -2.67$

bradisismica del 1982, vistose variazioni di alcuni parametri. In particolare, i valori delle temperature all'emergenza hanno mostrato forti oscillazioni, specialmente nelle acque a più elevata temperatura. Tali variazioni si sono verificate sia durante la fase ascendente che discendente del fenomeno bradisismico, da notare comunque che le temperature più elevate sono state raggiunte durante la fase ascendente. Per tutto il periodo di osservazione (maggio 1983, dicembre 1985) si sono ottenute sempre delle buone correlazioni positive tra i valori delle temperature all'emergenza e i contenuti in silice, litio, rubidio e ammonio. Confrontando tali valori con quelli ottenuti durante il bradisismo del 1970 (DALL'AGLIO et al., 1972) si è osservato che durante quest'ultima crisi, le temperature all'emergenza, i tenori in silice e il contenuto totale in sali disciolti sono risultati sempre più bassi, indicando una minore energia termica nell'acquifero profondo.

L'interazione acqua-roccia, favorita dalla spiccata termalità dell'aria, è anche evidenziata dai valori isotopici dell'ossigeno misurati nelle acque in esame. Infatti si osserva il caratteristico "shift" del $\delta^{18}O$ tipico delle aree geotermiche, mentre i valori del δD risultano decisamente confrontabili con quelli delle acque meteoriche della zona (BALDI et al., 1975) ad eccezione di tre campioni che risentono di particolari situazioni locali.

I diagrammi di attività mostrano che le acque flegree risulterebbero in equilibrio con Mg-clorite, Na-montmorillonite, illite, adularia, microclino e albite, a temperature di 150-200°C. Tali minerali sono stati rinvenuti sia nelle perforazioni effettuate nell'area flegrea (BRUNI et al., 1981, 1983) sia lungo alcune fratture subverticali che risultano cementate da illite, clorite, epidoto e quarzo (CARELLA e GUGLIELMINETTI, 1983). Inoltre la tendenza di tali acque ad equilibrarsi con termini termodinamicamente più stabili quali microclino e albite (fig. 7) è in accordo con quanto ottenuto in studi sperimentali di interazione acqua roccia (STANZIONE et al., 1987; FRANCO et al., 1988).

L'insieme dei dati ottenuti indica quindi che le acque esaminate, pur risentendo in vario grado degli apporti di fluidi provenienti dalla zona fillitico-propilitica, tendono tutte a raggiungere l'equilibrio con minerali neogenici a temperature fra i 150 e i 200° C, suggerendo quindi una circolazione che si sviluppa principalmente nella

BIBLIOGRAFIA

- ANTRODICCHIA E., CIONI R., CHIODINI G., GAGLIARDI R. e MARINI L. (1985)-Geochemical temperatures of the thermal waters of Phlegraean Fields (Naples, Italy). *Geoth. Res. Council*, 9, 194-199.
- ARMIENTI P., BARBERI F., BIZOUARD H., CLOCCHIATTI R., INNOCENTI F., METRICH N., ROSI M. e SBRANA A. (1983)-The Phlegraean Fields: magma evolution within a shallow chamber. *J. Volc. Geoth. Res.*, 17, 289-311.
- ARMIENTI P., BARBERI F. e INNOCENTI F. (1984)-A model of Phlegraean Fields magma chamber in the last 10.500 years. *Bull. Volcanol.*, 47-2, 349-358.
- ARNOSSON S. (1983)-Chemical equilibria in Icelandic geothermal system. Implications for chemical geothermometry investigation. *Geothermics*, 12, 119-128.
- BALDI P., FERRARA G.C. e PANICHI C. (1975)-Geothermal research in Western Campania (Southern Italy): Chemical and isotopic studies of thermal fluids in the Campi Flegrei. *Proc. 2nd U.N. Symp. on the development and use of geother. res.*, San Francisco, 1, 687-697.
- BARBERI F., CORRADO G., INNOCENTI F. e LUONGO G. (1984)-Phlegraean Fields 1982-1984: Brief chronicle of a volcano emergency in a densely populated area. *Bull. Volcanol.*, 47-2, 175-185.
- BARBERI F., INNOCENTI F., LIRER L., MUNNO R., PESCATORE T. e SANTACROCE R. (1978)-The Campanian Ignimbrite: a major prehistoric eruption in the neapolitan area (Italy). *Bull. Volcanol.*, 41-1, 10-31.
- BIGOT S. (1983)-Etude hydrogeochemique du Momotombo (Nicaragua). *Geochimie Comp. Syst. U.P.M.C.*, Paris.
- BISCHOFF J.L. e DICKINSON F.W. (1975)-Seawater-basalt interaction at 200°C and 500 bars: implication for origin of seafloor heavy metal deposits and regulation of seawater chemistry. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 25, 385-397.
- BOLOGNESI L., NOTO P. e NUTI S. (1986)-Studio chimico della Solfatara di pozzuoli: ipotesi sulle origini e sulle temperature profonde dei fluidi. *Rend. Soc. Ital. Miner. Petrol.*, 42, 281-295.
- BOTTINGA Y. (1969)-Calculated fractionation factor for carbon and hydrogen isotope exchange in the system calcite-carbon dioxide-grphyte-methane-hydrogen-water vapor. *Geochim. Cosmochim. Acta*, 33, 49-64.
- BRUNI P., CHELINI W., SBRANA A. e VERDIANI G. (1983)-Deep exploration of the San Vito area (Pozzuoli, Na). Well San Vito 1, in *European Geoth. Update Rep.*, 390-406.
- BRUNI P., SBRANA A. e SILVANO A. (1981)-Risultati geologici preliminari dell'esplorazione geotermica nell'area dei Campi Flegrei. *Rend. Soc. Geol. It.*, 4, 231-236.
- CAMELI G.M., RENDINA M., PUXEDDU M., ROSSI A., SQUARCI P. e TAFFI L. (1975)-Geothermal research in western Campania (Southern Italy): Geological and geophysical results. *Proc. 2nd Symp. on the development and use of geoth. res.*, San Francisco, 1, 315-327.
- CAPACCI E. (1835)-Nuove ricerche sul fenomeno delle colonne perforate dalle Faladi nel tempio di Serapide in Pozzuoli. *Il progresso delle Scienze, Lettere ed Arti*, XI, Napoli.
- CAPALDI G., CIVETTA L. e GILLOT P.Y. (1985)-Geochronology of Plio-Pleistocene volcanic rocks from southern Italy. *Rend. Soc. Ital. Mineral. Petrol.*, 40, 25-44.
- CARAPEZZA M., GUERRIERI S., NUCCIO P.M. e VALENZA M. (1984a)-CO₂ and H₂S concentrations in the atmosphere at the Solfatara of Pozzuoli. *Bull. Volcanol.*, 47-2, 287-293.
- CARAPEZZA M., NUCCIO P.M. e VALENZAM. (1984b)-Geochemical surveillance of the Solfatara of Pozzuoli (Phlegraean Fields) during 1983. *Bull. Volcanol.*, 47-2, 303-311.
- CARELLA R. e GUGLIELMINETTI M. (1983)-Multiple reservoirs in the Mofete Fields, Naples, Italy. Ninth workshop on geothermal reservoir engineering, Stanford University.
- CELICO P., DE GENNARO M., PAGANO D., RONCA A., STANZIONE D. e VALLARIO A. (1987)-Idrogeologia ed idrogeochimica dei Campi Flegrei: relazione tra chimismo delle acque e idrodinamica sotterranea. *Atti del Convegno "Bradisismo e fenomeni connessi"*, Napoli.
- CIONI R., CORAZZA E. e MARINI L. (1984)-The gas steam ratio as indicator of heat transfer at Solfatara fumaroles, Phlegraean Fields (Italy). *Bull. Volcanol.*, 47-2, 295-302.
- CORNIELLO A. e NICOTERA P. (1982)-Geologia, idrogeologia e idrochimica della zona sud-occidentale dei Campi Flegrei. *Memorie e Note dell'Istituto di Geologia Applicata*,

- CORRADO G., GUERRA I., LO BASCIO A., LUONGO G. e RAMPALDI R. (1976) - Inflation and microearthquake activity of Phlegraean Fields (Italy). *Bull. Volcanol.*, 40-3, 1-20.
- CORTECCI G., NOTO P. e PANICHI C. (1978) - Environmental isotopic study of the Campi Flegrei (Naples, Italy) geothermal fields. *J. Hydrol.*, 36, 143-159.
- CRAIG H. (1961) - Isotopic variations in meteoric waters. *Science*, 133, 1702-1703.
- DALL'AGLIO M., MARTINI M. e TONANI F. (1972) - Rilevamento geochimico delle emanazioni vulcaniche dei Campi Flegrei. *Quaderni de "La ricerca scientifica"*, CNR, 83, 152-181.
- D'AMORE F. e PANICHI C. (1985) - Geochemistry in geothermal exploration. *Energy Res.*, 9, 227-298.
- D'AMORE F.O., SCANDIFFIO G. e PANICHI C. (1983) - Some observation on the chemical classification of ground waters. *Geothermics*, 12, 141-148.
- DE GENNARO M., FERRERI M., GHIARA M.R. e STANZIONE D. (1984) - Geochemistry of thermal waters on the Island of Ischia. (Campania, Italy). *Geothermics*, 13, 361-374.
- DE GENNARO M., FRANCO E. e STANZIONE D. (1980) - Le alterazioni ad opera dei fluidi idrotermali nella Solfatara di Pozzuoli (Napoli). *Mineralogia e geochimica. Period. Miner.*, 49, 5-22.
- DEVIES C.V. (1962) - Ion association. Washington, Butterworths, 190 pp.
- DI GIROLAMO P., GHIARA M.R., LIRER L., MUNNO R., ROLANDI G. e STANZIONE D. (1984) - Vulcanologia e petrologia dei Campi Flegrei. *Boll. Soc. Geol. It.*, 103, 349-413.
- DI GIROLAMO P., INCORONATO A. e NARDI G. (1984) - Magnetic fabric investigation on Campanian ignimbrite (Southern Italy). *Dip. Sc. Terra, NAPOLI*, pp. 11.
- DI VITO M., LIRER L., MASTROLORENZO G. e ROLANDI G. (1987) - The 1538 Monte Nuovo eruption (Campi Flegrei, Italy). *Bull. Volcanol.*, 49, 608-615.
- ELLIS A.J. e MAHON W.A. (1967) - Natural hydrothermal system and experimental hot-water/rock interaction. Part. II. *Geochim. Cosmochim. Acta*, 31, 519-538.
- FRANCO E., DE GENNARO M. e STANZIONE D. (1985) - Effetti della interazione a 200°C tra acqua e ossidiana alcalitrichitica al variare della granulometria. *Atti Sem. Inf. Energia Geotermica SI-4 Roma*, 103-114.
- FRANCO E., GHIARA M.R. e STANZIONE D. (1988) - Studi sperimentali sull'alterazione idrotermale dei vetri vulcanici dei Campi Flegrei. *Atti Sem. Inf. SPEG del CNR*, 201-226.
- GAT J.R. e CARMI I. (1970) - Evolution of the isotopic composition of atmospheric waters in the Mediterranean sea area. *J. Res.*, 75, 3032-3048.
- GIGGENBACH W.F. (1980) - Geothermal mineral equilibria. *Geochim. Cosmochim. Acta*, 45, 393-410.
- GUNTER R.T. (1903) - Earth movements in Bay of Naples. *Geogr. Journ.*, XXII, London.
- HELGESON H.C., BROWN T.H. e LEEPER P.H. (1969) - Handbook of theoretical activity diagrams depicting chemical equilibria in geologic systems involving an aqueous phase at one atm. and 0° to 300°C. Freeman, Cooper e Company editor.
- ITALIANO F., NUCCIO P.M. e VALENZA M. (1984) - Geothermal energy release at the Solfatara of Pozzuoli (Phlegraean Fields): Phreatic and phreatomagmatic explosion risk implications. *Bull. Volcanol.*, 47-2, 275-285.
- LIRER L., LUONGO G. e SCANDONE R. (1987) - On the volcanological evolution of Campi Flegrei. *Eos*, 68, 16, 226-234.
- LIVIERA ZUGGIAI B. (1972) - Controlli altimetrici dei capisaldi nell'area flegrea. *Quaderni de "La ricerca scientifica"*, 83, 263-283.
- LOMBARDI S., DI FILIPPO M. e ZANTEDESCHI L. (1984) - Helium in Phlegraean Fields soil gases: July, 20th-26th; September, 19th-25th 1983. *Bull. Volcanol.*, 47-2, 259-265.
- LYELL C. (1850) - Principles of geology. London.
- MAGARITZ M., NADLER A., KAFRI U. e ARAD A. (1984) - Hydrogeochemistry of continental brackish waters in the southern coastal plain, Israel. *Chem. Geol.*, 42, 159-176.
- MAGARITZ M. e KAFRI U. (1979) - Concentration of magnesium in carbonate nodules of soils: an indication of fresh groundwater contamination by intruding seawater. *Chem. Geol.*, 27, 143-155.
- MAHOOD G., TRUESDELL A.H. e TEMPLOS M.L.A. (1983) - A reconnaissance geochemical study of La Primavera geothermal area, Jalisco, Mexico. *J. Volc. Geotherm. Res.*, 16, 247-261.
- MARTINI M., CELLINI LEGITTIMO P., PICCARDI G. e GIANNINI L. (1984) - Composition of hydrothermal fluids during the bradyseismic crisis which commenced at the Phlegraean Fields in 1982. *Bull. Volcanol.*, 47, 276-273.
- MOGI K. (1958) - Relation between the eruptions of various volcanoes and the deformations of the ground surface around them. *Bull. Earth Res. Inst.*, 36, 99-134.

- NICCOLINI A.(1846)-Descrizione della gran terra Puteolana,volgarmente detto Tempio di Serapide. Stamperia Reale, Napoli.
- OLIVERI DEL CASTILLO A. e MONTAGNA S.(1934)-Nuovi elementi sulla connessione tra termofluido dinamica e geodesia ai Campi Flegrei(Napoli). Atti del Convegno annuale di geofisica della litosfera,Roma.OLIVERI DEL CASTILLO A. e QUAGLIARIELLO M.T.(1969)-Sulla genesi del bradisismo flegreo. Atti Ass.Geof.Italiana, (557-594).
- PARASCANDOLA A.(1947)-I fenomeni bradisismici del Serapeo di Pozzuoli. Genovese,Napoli.
- ROSI M.,SBRANA A. e PRINCIPE P.(1983)-The phlegraean Fields:Structural evolution,volcanic history and eruption mechanism.J.Volc.Geoth.Res.,17, 273-288.
- SAKAI H. e MATSUBAYA O.(1977)-Isotope geochemistry of hot springs in Japan and its role in the Kuroko one forming solutions. Stable isotope in Geology and ore-forming problem. Mir.Moscow.,510 pp.
- SAXENA V.K. e D'AMORE F.(1984)-Acquifer chemistry of the Puga and Chumatang high temperature geothermal systems in India. J.Volc.Geoth.Res.,21, 333-346.
- SAXENA V.K. e GUPTA M.L.(1985)-Acquifer chemistry of thermal waters of Godavari valley, India. J.Volc.Geoth.Res.,25, 181-191.
- SAXENA V.K. e GUPTA M.L.(1986)-Geochemistry of thermal waters of Salbardi and Tatapani, India.Geothermics, 15, 705-714.
- SEYFRIED W.E.jr. e BISCHOFF J.L.(1977)-Hydrothermal transport of heavy metals by seawaters; the role of seawater basalt ratio. Earth Planet., Sci.Lett., 34, 71-78.
- SEYFRIED W.E.jr. e BISCHOFF J.L.(1979)-Low temperature basalt alteration: an experimental study at 70 and 150°C. Geochim.Cosmochim.Acta, 43, 1937-1944.
- STANZIONE D.,FRANCO E. e DE GENNARO M.(1984)-Primi risultatti delle esperienze sull'interazione acqua-vetro trachitico a 200°C. Rend.Soc.Ital.Min.Petrol., 39, 253-260.
- STANZIONE D. e GHIARA M.R.(1984)-Rapporto sulla sorveglianza geochimica delle acque del comprensorio di Pozzuoli in relazione al Bradisismo flegreo: maggio 1983-luglio 1984. Dati sulla sorveglianza geochimica dei Campi Flegrei,C.N.R., 82-129.
- STANZIONE D. e GHIARA M.R.(1985)-Rapporto sulla sorveglianza geochimica delle acque del comprensorio di Pozzuoli in relazione al Bradisismo flegreo: settembre 1984-febbraio 1985. Dati sulla sorveglianza geochimica dei Campi Flegrei, C.N.R.,1-34.
- STANZIONE D.,GHIARA M.R.,DE GENNARO M.,FRANCO E. e PETTI C.(1986)-Studi sperimentali sul sistema vetro shoshonitico-H₂O per fini geotermici. Atti Sem.Inf.Energia Geotermica Pisa, 2, 32-43.
- STANZIONE D.,GHIARA M.R.,FRANCO E. e PETTI C.(1987)-Reaction of pyroclastic glasses of the phlegraean Fields with H₂O at 200°C: effects of time, granulometry and solution composition on alteration mineralogy. Rend.Acc.Sc.Fis.Mat., Sp. Issue, 317-339.
- STUMM W. e MORGAN J.J.(1970)-Aquatic chemistry. Wiley-Interscience, 583 pp.
- TRUESDELL A.H. e JONES F.(1974)-WATEQ, a computer program for calculating chemical equilibria on natural waters. Jour.Res.U.S.G.S., 2, 233-248.
- WHITE D.E.(1957)-Thermal waters of volcanic origin. Bull.Geol.Soc.Am., 68, 1637-1658.

LA SEDIMENTAZIONE MIOCENICA NELL'APPENNINO CAMPANO LUCANO

Nota di Tullio Pescatore*, socio corrispondente

Adunanza del 6 maggio 1989

Riassunto

Nell'Appennino meridionale la deformazione dei domini paleogeografici del margine continentale dell'Adria individua, nel Miocene inferiore, nuovi domini sedimentari che conservano le loro caratteristiche fino al Tortonianiano quando un'importante fase tettonica determina significative variazioni paleogeografiche.

In questi domini paleogeografici, individuati complessivamente come Bacino Irpino, si distinguono: (a) bacini tipo "piggy-back" localizzati sulle coltri; (b) bacini di avanfossa in senso stretto ubicati al piede delle coltri; (c) bacini di avampaese posti in aree non ancora interessate dai movimenti tettonici.

Si evidenzia l'influenza della paleogeografia mesozoica preesistente sull'evoluzione del Bacino Irpino.

Abstract

The Southern Apennine Chain is composed of units deriving from the deformation of the continental margin of the Adria Plate. In the Neogene, the

* Dipartimento di Scienze della Terra, Università di Napoli

Largo S. Marcellino, 10 - 80138 Napoli

most external domains of this margin were involved in the orogeny. The Irpinians Units were deposited from Burdigalian to Tortonian in a basin called Irpinian Basin, a Miocene foredeep. The depocentres of the Irpinian Basin may be separated into three groups: (1) Upon the allochthonous thrust sheets - Piggy-back basins, Gorgoglione flysch; (2) At the front of the thrust sheets - Foredeep basin sensu stricto, Serra Palazzo Formation and Castelvetero Flysch; (3) In the area not yet deformed - Foreland basin, Faeto Formation. The sedimentation occurred while the axis of the basin migrated eastward. Structural trend of the Irpinian basin were controlled by features acquired during the Mesozoic tensile regime.

1. Premessa

Nell'Appennino Meridionale, la deformazione dei domini paleogeografici del margine continentale dell'Adria inizia con il Miocene inferiore (Aquitano-Burdigaliano) e porta all'individuazione di nuovi domini sedimentari che conservano caratteristiche pressochè simili fino al Tortoniano, quando un importante fase tettonica determina significative variazioni paleogeografiche.

L'evoluzione tettonica e i processi sedimentari dei domini paleogeografici che si sono individuati nel Miocene inferiore sono stati condizionati da quelli preesistenti, costituiti da piattaforme carbonatiche e bacini pelagici che hanno preso origine durante le fasi distensive mesozoiche.

Esistono, tra gli autori, divergenti opinioni circa l'evoluzione miocenica dell'Appennino meridionale: si fa riferimento a differenti modelli paleogeografici mesozoici, si utilizzano schemi di sistemi di avanaffossa diversi, si hanno datazioni non concordanti per le stesse unità.

Si riportano di seguito, anche se in maniera non esauriente, i

principali schemi dei bacini miocenici proposti e si conclude con uno schema elaborato dallo scrivente.

2. Schemi evolutivi della sedimentazione miocenica

Il primo schema strutturale dell'Appennino meridionale in cui viene individuata una struttura a coltri di ricoprimento viene proposto da SELLI nel 1962; attualmente questo schema, che prevede l'autoctonia della successione carbonatica mesozoica risulta superato; pur tuttavia nell'ambito dei terreni alloctoni vengono definiti elementi stratigrafici strutturali tra le varie unità che, tuttora validi, sono stati di riferimento per tutti i successivi studi (fig. 1).

SELLI (1962) individua nell'Appennino meridionale: a) la "catena appenninica" autoctona ("paleoautoctona"), costituita da una potente successione calcareo-dolomitica mesozoica sulla quale trasgrediscono terreni neogenici; b) l'"avanfossa apenninica" suddivisa in un settore occidentale, occupato da più sistemi di ricoprimenti gravitativi separati da successioni mesoautoctone e coperte da sequenze neoautoctone, e un settore orientale, colmato soltanto da terreni autoctoni; c) l'"avampaese appenninico", prolungamento della "catena apenninica" al di sotto delle coltri, nell'area murgiana.

La successione miocenica "autoctona" trasgressiva sui terreni mesozoici (SELLI, 1957) è data, in tutto l'Appennino meridionale, da terreni calcarei di ambiente neritico, basali (Formazione di Cerchiara, Langhiano medio; Formazione di Roccadaspide, Langhiano inferiore; Formazione di Cusano, Langhiano superiore) che rapidamente passano a depositi silico-clastici torbiditici (Formazione di Bifurto, Langhiano; Formazione di Capaccio, Langhiano; Formazione di Longano e Pietrarola, Elveziano). Queste successioni indicano un rapido approfondimento dei bacini

miocenici. La trasgressione si svolse in due fasi la prima durante l'Aquitano e il Langhiano la seconda nell'Elveziano.

Nell'ambito dell'"avanfossa appenninica" i terreni miocenici sono di regola di ambiente marino profondo e torbiditici, essi costituiscono:

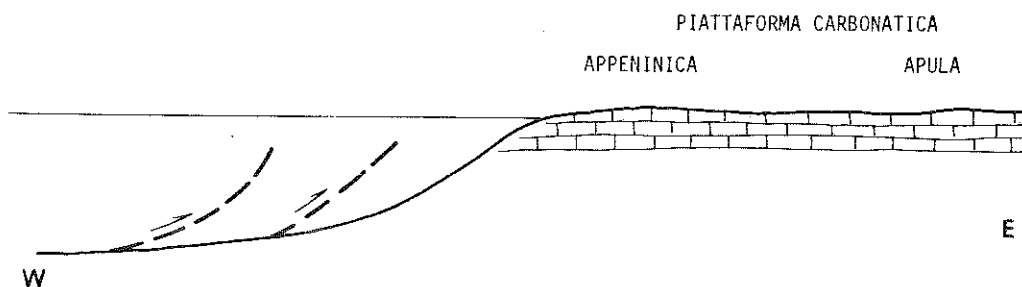
- successioni alloctone: la Formazione di Serra Palazzo (Langhiano superiore-Elveziano inferiore), arenaceo-marnosa e la Formazione di Stigliano (Aquitano-Langhiano), quarzo-arenitica, appartenenti alle coltri lucane;
- terreni mesoautoctoni poggianti sulle coltri: Formazione di Albidona (Langhiano superiore-Elveziano inferiore), una successione marnosa arenacea poggiante sulle coltri lagonegresi e nord-calabresi; Formazione di Tufillo (Langhiano superiore-Elveziano inferiore), prevalentemente calcareo-marnosa e Formazione di Agnone (Elveziano Tortoniano), marnosa-arenacea poggiante sulle coltri molisane;
- terreni neoautoctoni: Formazione di Gorgoglione (Elveziano inferiore e medio), una successione prevalentemente arenacea poggiante sulle coltri lucane e sul mesoautoctono di Albidona .

OGNIBEN (1969, 1986) considera alloctona la successione carbonatica mesozoica (Piattaforma Panormide) e pone come elemento strutturale più profondo della catena appenninica il "Complesso basale".

Nello schema paleogeografico proposto da OGNIBEN (1969, 1986) si individuano (fig. 2): a) l'avampaese apulo dove si sedimenta una potente successione carbonatica neritica meso-cenozoica; b) un bacino ("miogeosinclinale") sede di deposizione del Complesso basale ed ex-basale, cioè una successione calcareo-silico-marnosa e terreni flyscioidi cenozoici; c) la "soglia intermedia", dove si depone la successione calcarea mesozoica della Piattaforma Panormide e i terreni "della trasgressione miocenica" corrispondenti alle successioni paleoautoctone di SELLI (1962); d) un bacino ("eugeosinclinale") dove avviene la sedimentazione dei Complessi Liguride e Sicilide; e) il "massiccio interno", dato dal Complesso Calabride.

La sedimentazione miocenica terrigena del bacino eugeosinclinalico è

SCHEMA PALEOGEOGRAFICO SEMPLIFICATO DURANTE IL LANGHIANO

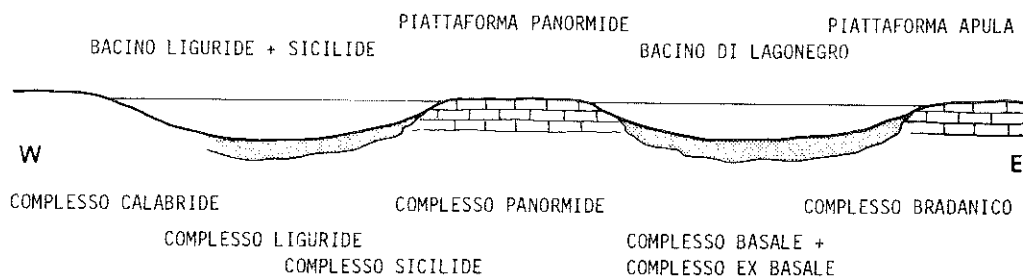


SELLI 1962

FIG. 1 - Schema paleogeografico (a) e strutturale (b) semplificato dell'Appennino proposto da SELLI (1962).

Lo schema paleogeografico si riferisce al periodo Langhiano Tortoniano e prevede una "fossa" ad ovest di una ampia zona di piattaforma carbonatica neritica corrispondente all'avampaese apulo e alla piattaforma appenninica. Lo schema strutturale mette in evidenza la continuità dei terreni autoctoni della Piattaforma appenninica all'avampaese apulo) e le coltri alloctone (Terreni caotici e zolle inglobate).

SCHEMA DEI DOMINI PALEOGEOGRAFICI DURANTE L'AQUITANIANO - TORTONIANO E RELATIVE SUCCESSIONI



SUCCESSIONI MIOCENICHE RELATIVE AI VARI DOMINI PALEOGEOGRAFICI

FLYSCH DI
GORGOGNONE

TERRENI DELLA
TRASGR. MIOCENICA

FLYSCH DI
SERRAPALAZZO

CALCARENITI

RICOPRIMENTO ANTISICILIDE

FLYSCH NUMIDICO

OGNIBEN 1969/86

FIG. 2 - Schema paleogeografico semplificato proposto da OGNIBEN (1969, 1985) durante l'Aquitano-Langhiano.

Lo schema prevede vari bacini (Bacino Liguride e Sicilide e Bacino di Lagonegro) separati dalla Piattaforma Panormide e piattaforma apula.

La figura riporta i vari Complessi depositi in questi bacini mesozoici; nella parte bassa, sono specificati i terreni miocenici di tali bacini.

Viene infine evidenziato il "ricoprimento antisicilide" che interessa nell'Aquitano il Bacino Sicilide con vergenza antiappenninica.

data dal Flysch di Gorgoglione (Burdigaliano-Elveziano); quella della soglia intermedia è costituita dai terreni della "trasgressione miocenica"; infine nel bacino esterno la successione miocenica è data dal "Complesso ex-basale: il Flysch Numidico (Oligocene-Burdigaliano) e una successione calcarea, marnosa e silico-clastica torbiditytica (Marne arenacee di Serra Cortina, Formazione di Masseria Palazzo, Formazione di Serra Palazzo s.s. Flysch di Masseria Luci) di età compresa tra il Burdigaliano e l'Elveziano.

Nell'ambito dei depositi silico-clastici miocenici, solo il Flysch di Gorgoglione si deposita su terreni deformati nel Miocene inferiore (ricoprimento antisicilide); tutte le altre successioni sono precedenti le fasi tettonogenetiche. Tutti questi terreni nell'Elveziano-Tortoniano vengono traslati verso l'avampaese.

Nello schema paleogeografico proposto da D'ARGENIO et al. (1973, 1975), per quel che qui interessa (fig. 3a), vengono individuati due ulteriori domini paleogeografici mesozoici tra la Piattaforma Panormide e l'avampaese apulo di OGNIBEN (1969); per cui si ha la seguente successioni di bacini e piattaforme: bacino silentino, piattaforma campano-lucana, bacino lagonegrese, piattaforma abruzzese-campana, bacino molisano e piattaforma apula.

Le principali successioni mioceniche dell'Appennino campano lucano vengono raggruppate come "unità irpine" da COCCO et al. 1972, D'ARGENIO et al. (1973), PESCATORE (1978) ed altri. Queste unità comprendono successioni silico-clastiche discordanti sulle coltri alloctone (Flysch di Gorgoglione) e sequenze torbiditytiche calcaree e silico-clastiche (Formazione di Serra Palazzo) o calcareo e marnose (Flysch di Faeto, CROSTELLA e VEZZANI, 1964) che seguono in continuità di sedimentazione i depositi sottostanti.

Secondo COCCO et al. (1972), PESCATORE, (1978) queste unità si sono deposte in un bacino, il Bacino Irpino (fig. 3b), che ha preso origine durante la fase tettonogenetica burdigaliana. Questa fase tettonica ha

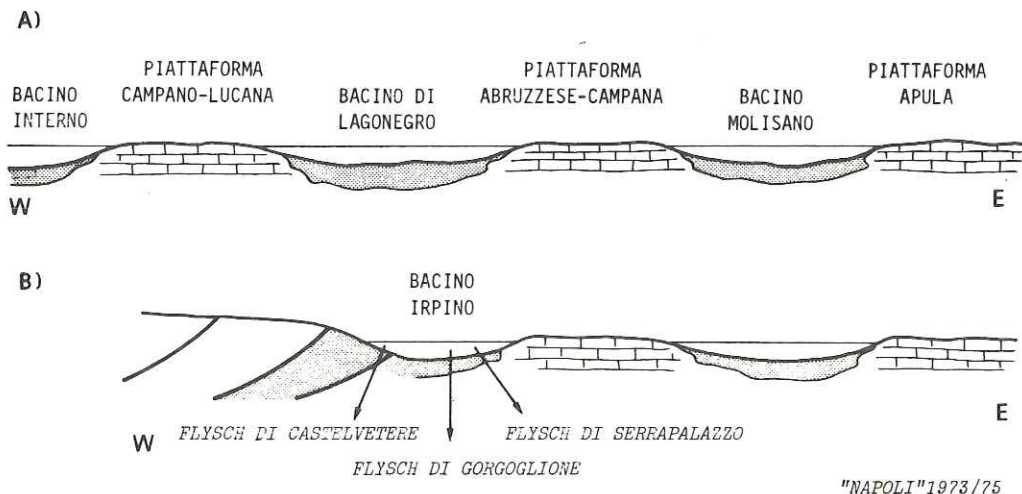


FIG.3 - Schemi paleogeografici semplificati proposto in vari lavori di ricercatori dell'Università di Napoli nel periodo 1973-1975 (vedi testo).

La figura A riporta lo schema paleogeografico nel Miocene inferiore, prima della fase tettonica langhiana; il modello prevede più piattaforme carbonatiche neritiche (piattaforma campano-lucana, abruzzese campana e apula) separate da bacini pelagici (bacino lagonegrese e bacino molisano).

La figura B riporta lo schema paleogeografico nel Langhiano, dopo la fase tettonica, che ha interessato oltre i terreni del "Bacino interno" quelli della piattaforma campano-lucana e dei bacini di Lagonegro pro-parte, dando luogo al Bacino irpino. La figura riporta la posizione paleogeografica delle principali unità irpine.

interessato varie unità paleogeografiche mesozoiche (bacino silentino, piattaforma campano-lucana, bacino lagonegrese) dando luogo ad una serie di coltri di ricoprimento che costituivano il margine occidentale del bacino, impostato in parte sul preesistente Bacino di Lagonegro; il margine orientale del Bacino Irpino era costituito invece da una piattaforma carbonatica non deformata. Secondo alcuni autori (COCCO et al., 1972; D'ARGENIO et al., 1973; PESCATORE, 1978) tale piattaforma carbonatica era rappresentata dalla Piattaforma Abruzzese-campana, secondo altri (PESCATORE & TRAMUTOLI, 1980; DAZZARO & RAPISARDI, 1984; PESCATORE & SENATORE, 1986) era rappresentata dalla Piattaforma Apula. In questo secondo caso si utilizza uno schema paleogeografico, per le aree prossime all'avampaese apulo, più simile a quello

proposto da OGNIBEN (1969).

Durante la sua evoluzione l'asse del bacino, che ha le caratteristiche di un'avanfossa, ha migrato da SW verso NE con un diacronismo delle facies terrigene.

Il Bacino Irpino scompare in seguito alla fase tettonica del Tortoniano.

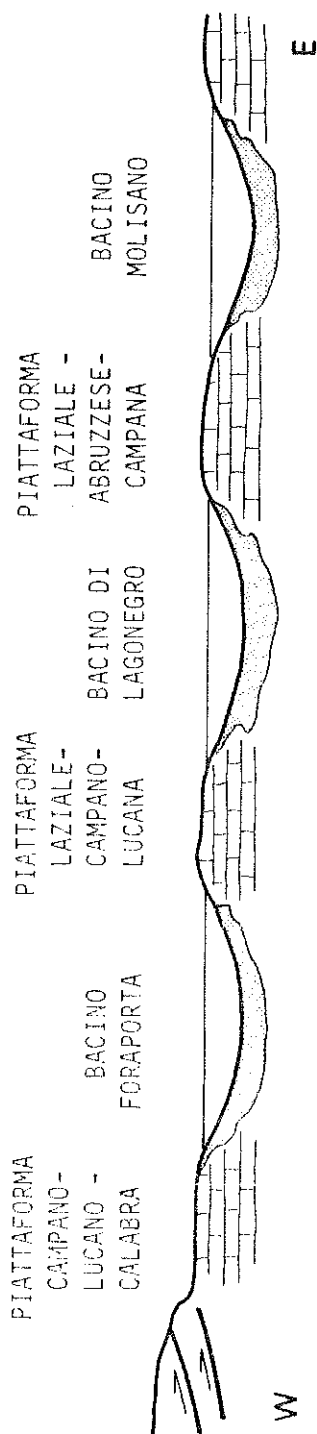
OGNIBEN (1969, 1986) non prende in considerazione la fase tettonica burdigaliana e ritiene, come si è detto, che le varie successioni attribuite alle Unità Irpine si siano deposte in differenti bacini: il Flysch di Gorgoglione, nel Bacino Sicilide, ad ovest della Piattaforma Panormide, e la Formazione di Serra Palazzo ad est della piattaforma, nel Bacino di Lagonegro.

SGROSSO (1981), PERRONE (1982), PERRONE & SGROSSO (1981), a sud-est del Fiume Sele, riconoscono due differenti successioni mioceniche trasgressive sui depositi carbonatici della Piattaforma Campano-lucana (fig. 4b): la prima successione, che evolve da calcareniti a quarzoarenti gradate tipo Flysch Numidico, è di età compresa tra l'Oligocene ed il Burdigaliano ("I ciclo"); la seconda, data da calcareniti che passano verso l'alto a depositi "immaturi" arcosico-litici, è di età compresa tra il Langhiano ed il Serravalliano ("II ciclo"). Nelle aree a nord del Fiume Sele, è presente solo questa ultima successione ("II° ciclo").

Queste due differenti successioni hanno portato i predetti autori a definire due differenti bacini: il "Bacino pre-Irpino", in cui si sono deposte le successioni del "I ciclo" (Oligocene superiore - Burdigaliano) ed il "Bacino Irpino" in cui si sono depositi i sedimenti del "II ciclo" (Langhiano - Tortoniano), separati da una importante fase tectogenetica, caratterizzata anche da notevoli movimenti isostatici.

Infine SGROSSO (1983, 1986) e SGROSSO et al., (1988) propongono uno schema paleogeografico in cui si susseguono molteplici piattaforme carbonatiche neritiche intervallate da altrettanti bacini (fig. 4a); in questo schema assume un'importanza definitiva l'inizio della sedimentazione silico-clastica per definire l'originaria posizione paleogeografica dei vari

A) SCHEMA DEI DOMINI PALEOGEOGRAFICI DURANTE IL MIOCENE INFERIORE



B) SUCCESSIONI MIOCENICHE DELL'APPENNINO MERIDIONALE RELATIVE AI VARI DOMINI SEDIMENTARI

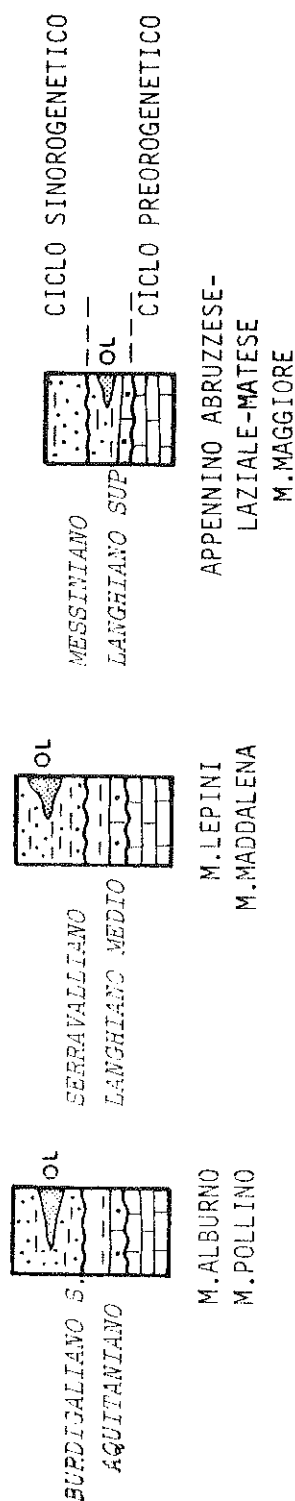


FIG. 4 - Schema paleogeografico semplificato proposto da SGROSSO (1985, 1988).

Questo schema prevede nel Mesozoico un serie di piattaforme carbonatiche intervallate da vari bacini; nel Miocene queste unità paleogeografiche vengono successivamente coinvolte dalla tettonica. Nel Miocene sulle piattaforme carbonatiche, vengono individuati cicli sedimentari preorogenetici e sinorogenetici via via più recenti verso l'avampaese. (vedi testo)

SGROSSO 1985/87

domini. La sedimentazione miocenica terrigena risulta diacrona e di età più recente verso i bacini più prossimi all'avampaese apulo, in connessione a fasi tetto-genetiche che colpiscono, in toto, i domini paleogeografici preesistenti, determinandone la scomparsa.

MOSTARDINI & MERLINI (1986), nel loro schema strutturale, raggruppano le successioni carbonatiche mesozoiche dell'Appennino in un'unità singola unità paleogeografica: la piattaforma sud-appenninica; pongono le unità lagonegresi, molisane e sicilidi in un unico bacino (bacino lagonegrese molisano) che nel Miocene evolve a bacino irpino; distinguono infine la piattaforma apula in interna ed esterna individuando il bacino apulo tra le due, in questo bacino si è deposto il Flysch di Faeto (CROSTELLA e VEZZANI, 1964).

In conclusione in seguito alla fase tetto-genetiche del Miocene inferiore si individuano nuovi domini sedimentari, che presentano le caratteristiche di un'avanfossa. Durante il Miocene e fino al Tortoniano Messiniano nell'Appennino campano-lucano, questi domini migrano verso NE e l'area di avampaese viene ad essere via via coinvolta dalla tetto-genesi mentre la sedimentazione conserva caratteristiche simili.

3. Il Bacino Irpino

Gli schemi finora proposti anche se non esplicitamente ammettono un parallelismo tra i limiti delle facies, e quindi dei domini paleogeografici, e quelli dei fronti di sovrascorrimento; dimodochè le varie unità paleogeografiche vengono colpite in toto dalla deformazione tettonica. Invece uno schema nel quale i limiti paleogeografici e fronti di sovrascorrimento siano divergenti, in modo tale che le varie unità paleogeografiche siano gradualmente e parzialmente interessate dai movimenti

SCHEMA PALEOGEOGRAFICO DEI DOMINI APPENNINICI
DURANTE L'OLIGOCENE - MIOCENE (A) E IL MIOCENE MEDIO (B)

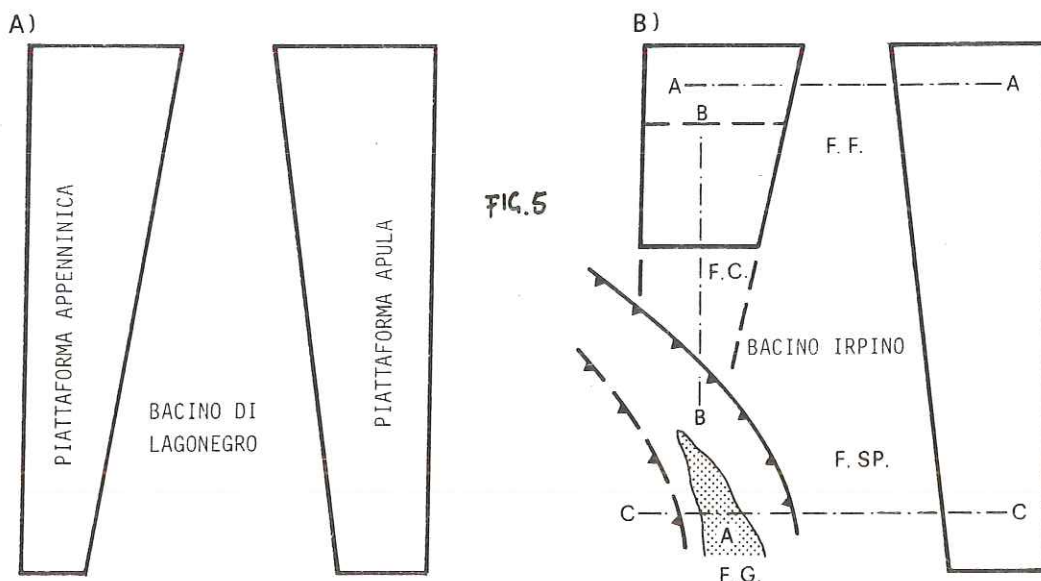


FIG. 5 - Schemi paleogeografici dell'Appennino meridionale.

A - Nell'Oligocene-Miocene sono individuate due ampie zone di piattaforma carbonatica neritica (Piattaforma Appenninica e Piattaforma Apula) separate da un bacino (Bacino di Lagonegro).

B - Nel Miocene medio, dopo una fase tettonica con fronti di accavallamento obliqui rispetto alle zone paleogeografiche mesozoiche, vengono deformate, in parte, la Piattaforma Appenninica e il Bacino di Lagonegro). Si individua un'avanfossa (Bacino Irpino) in cui si distinguono:

- 1 - bacini tipo "piggy-back", poggianti sulle coltri;
- 2a e 2b - bacini di avanfossa in senso stretto, al piede delle coltri;
- 3 - bacini di avampaese, nelle aree non coinvolte dalla tettonica.

Nella figura sono individuati dei profili (A-A; B-B; C-C) che evidenziano le caratteristiche di questa avanfossa (vedi figg. 8a, b, c).

tettogenetici, consente, a parere dello scrivente, una più precisa definizione dei depositi dell'avanfossa miocenica ed evidenzia l'influenza decisiva dei domini paleogeografici preesistenti sulla sedimentazione.

Si ritiene proponibile il seguente schema paleogeografico precedente la tettonogenesi miocenica, da ovest verso est (fig. 5a):

- piattaforma apula, zona molto ampia a sedimentazione carbonatica prevalentemente neritica;
- bacino lagonegrese molisano, nel quale si siano sedimentate anche le "argille varicolori" (MOSTARDINI e MERLINI, 1985), intese come "complesso Sicilide di OGNIBEN, 1969.

- piattaforma sud appenninica s.l., area a sedimentazione carbonatica prevalentemente neritica, che comprenda la piattaforma campano-lucana e quella abruzzese-laziale (D'ARGENIO et. Al. 1973), ma che presenti anche zone minori e trasversali a sedimentazione calcarea e marnosa torbiditica o pelagica;
- bacino silentino nel quale si ha una sedimentazione terrigena già nel Cenozoico inferiore.

Durante il Paleogene e fino al Miocene inferiore, nel Bacino di Lagonegro, tra la Piattaforma Sud-appenninica e la Piattaforma Apula, si deponevano, nelle zone marginali, sedimenti calcarenitici e calciruditici torbiditici che provenivano dai margini delle piattaforme o dalle aree emerse; ai depositi calcarei si intercalavano argille e argille marnose rosse e verdi (Flysch Rosso), che comprendono anche le cosiddette Argille varicolori del Bacino di Lagonegro di DAZZARO & RAPISARDI, 1984). Nelle zone centrali di questo bacino si deponevano invece i depositi del Complesso Sicilide di OGNIBEN 1969 (MOSTARDINI e MERLINI, 1986; PESCATORE et al. 1988). Al di sopra questi depositi, a partire dall'Oligocene-Aquitano, si sono depositi i sedimenti prevalentemente quarzosi del Flysch Numidico, di provenienza meridionale. Tali depositi hanno notevole spessore nelle zone centrali del bacino e nelle aree meridionali (Lucania); nelle zone laterali e nelle aree settentrionali (Campania e Puglia) il loro spessore si riduce fino ad annullarsi.

Nel Miocene inferiore si ha una fase tettonica che colpisce varie unità paleogeografiche (bacino silentino, piattaforma sud-appenninica, bacino lagonegrese-molisano).

Tale fase dà luogo ad un bacino di avanfossa s.l. (Bacino Irpino) tra un margine deformato costituito da coltri ed il margine non deformato costituito dalla Piattaforma Apula (fig. 5b). Il fronte delle coltri è obliquo rispetto all'andamento delle unità paleogeografiche, di modo che la migrazione del fronte verso l'avampaese determina lo spostamento dell'asse del bacino, il

progressivo annegamento della piattaforma verso N e NE e il restringimento del bacino lagonegrese-molisano.

Sono stati individuati in questo bacino (fig. 5) vari depocentri (PESCATORE e SENATORE, 1986) che si possono classificare, come in altri settori appenninici (BOCCALETTI et al., 1985), in:

1) bacini di avampaese, ubicati in aree non ancora interessate dalla tetto-genesi. Sono interpretati come depositi di bacini di avampaese le successioni tipo "Flysch di Faeto" costituite esclusivamente da depositi carbonatici pelagici o torbidity (figg. 6, 7). L'apporto dei frammenti calcarei dedotto dalle controimpronte indicano una provenienza del materiale da NE. Gli autori sono discordi se porre questa unità in un bacino (Bacino lagonegrese molisano) al margine orientale della Piattaforma Apula (PESCATORE e SENATORE, 1986; SENATORE 1987) o tra la Piattaforma Apula interna (fig. 8a) e quella esterna (MOSTARDINI & MERLINI, 1986; SGROSSO, 1988).

2) bacini di avanfossa s.s., ubicati al piede del fronte alloctono. Sono interpretati come depositi di avanfossa la Formazione di Serra Palazzo, un alternanza di depositi calcareo-clastici e terrigeni torbidity, e la Formazione di Castelvete-re, caratterizzata da sedimentazione terrigena con olistoliti calcarei (figg. 6, 8b).

Le successioni tipo Formazione di Serra Palazzo sono ubicate in corrispondenza di bacini mesozoici (Bacino di Lagonegro) non ancora colpite dalla tetto-genesi miocenica; il rifornimento di queste aree avveniva sia dalle coltri (materiale silico-clastico) sia dall'avampaese miocenico (Piattaforma Apula; fig. 8c).

Le successioni tipo Formazione di Castelvete-re (Figg. 6, 7) sono ubicate in aree che nel Mesozoico costituivano delle piattaforme carbonatiche neritiche e che durante il Miocene sono sprofondate a causa dell'avanzare delle coltri (PESCATORE e SENATORE, 1986). Al di sopra delle successioni mesozoiche e paleogeoniche della piattaforma carbonatica dell'Appennino centro meridionale sono ampiamente presenti depositi miocenici che mostrano

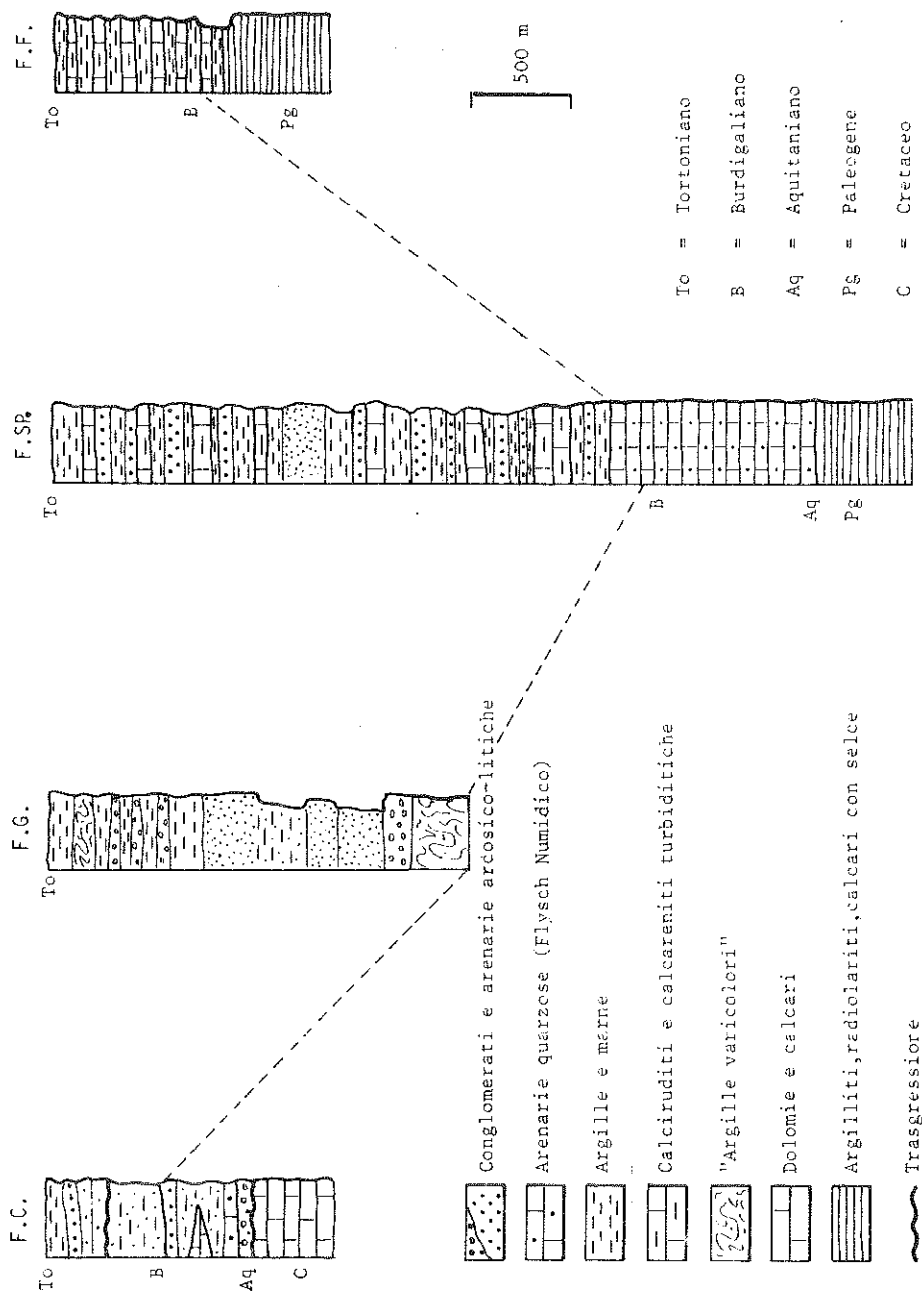


FIG. 6 - Colonne stratigrafiche delle principali successioni irpine.

L'ubicazione è riportata in figura 7.

Le frecce alla base delle colonne indicano l'influsso della sedimentazione calcareo-clastica e silico-clastica.

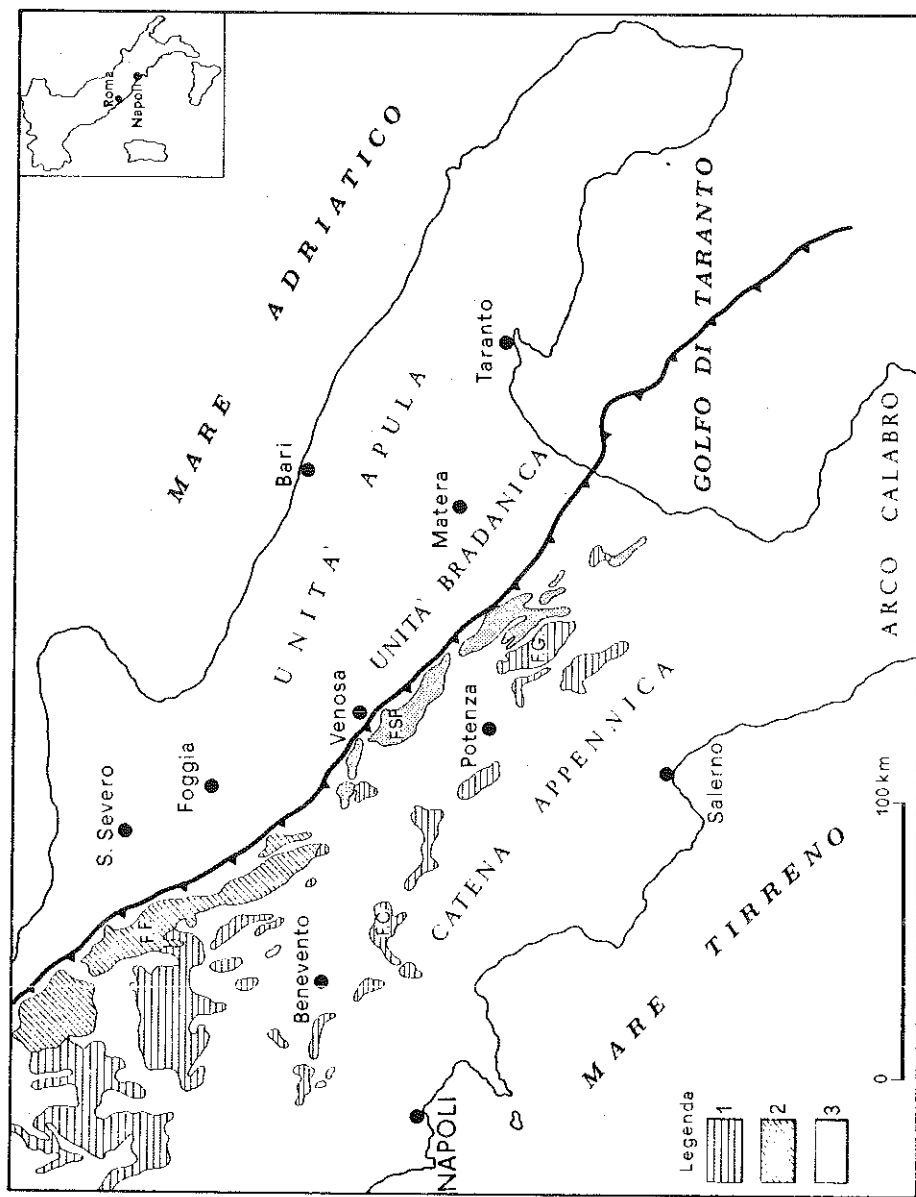


FIG. 7 - Distribuzione delle Unità irpine nell'Appennino meridionale. Sono distinte le facies calcareo-clastiche rispetto a quelle silico-clastiche. E' riportata l'ubicazione delle colonne stratigrafiche della figura 6.

PROFILO A - A

PIATTAFORMA APPENNINICA

FLYSCH DI FAETO

PIATTAFORMA APULA

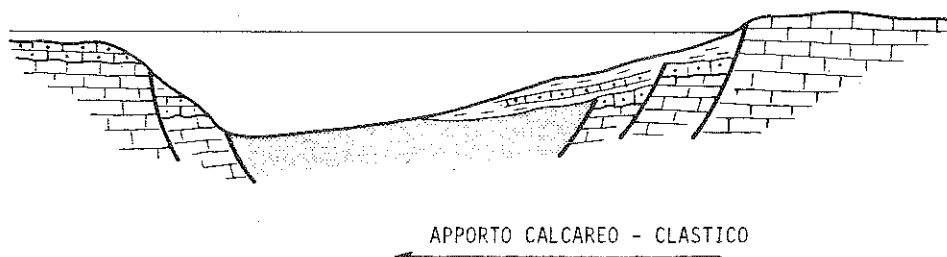


FIG. 8a - Profilo paleogeografico A-A (vedi fig. 5).

Il profilo riporta un settore del bacino non interessato direttamente dalla fase tettonica; la sedimentazione è esclusivamente calcareo-clastica, la provenienza del materiale calcareo è dalla Piattaforma Apula. Il "Flysch di Faeto" rappresenta la sedimentazione di questo settore del Bacino Irpino.

una tipica sequenza di annegamento. I sedimenti basali di questa sequenza hanno un'età aquitaniana nelle aree meridionali e serravalliana in quelle settentrionali. Il diacronismo delle successioni mioceniche indica un annegamento progressivo, verso N e NE dei preesistenti domini di piattaforma (CARANNANTE et al. 1987). Anche in questo caso il materiale silico-clastico arrivava in queste aree dalle coltri mentre il materiale calcareo (olistoliti e brecce calcaree) proveniva dalla piattaforma antistante (Piattaforma Sud-appenninica); sud del Sele, nelle successioni aquitaniano-burdigaliane sono presenti anche depositi quarzosi correlabili con il Flysch Numidico, di provenienze meridionale (fig. 8b).

3) bacini tipo "piggy back" (ORI e FRIEND, 1984), ubicati sulle coltri. Il Flysch di Gorgoglione può rappresentare un esempio di successione deposta in questo bacino (figg. 6, 7). Tale successione risulta in discordanza su sedimenti già deformati; la provenienza del materiale silico-clastico è dalle coltri (fig. 8c).

PROFILO B - B

MARGINE OROGENICO

PIATTAFORMA APPENNINICA

TERRENI DELLA TRASGRESSIONE MIOCENICA +
FLYSCH DI CASTELVETERE

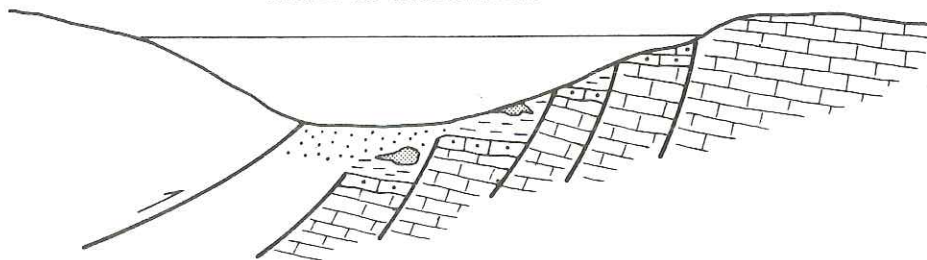


FIG. 8b - Profilo paleogeografico B-B (vedi fig. 5)

Il profilo interessa l'avanfossa ubicata tra il margine attivo, orogenico, e la piattaforma carbonatica appenninica.

La piattaforma carbonatica "annega" al di sotto delle coltri; la successione miocenica è data da una successione da neritica a batiale con depositi terrigeni (terreni della trasgressione miocenica); nella parte sommitale, ai depositi terrigeni sono intercalati olistoliti calcarei provenienti dalla piattaforma (Flysch di Castelveteri).

PROFILO C - C

FLYSCH DI GORGOGGLIONE

FLYSCH DI SERRAPALAZZO

PIATTAFORMA APULA

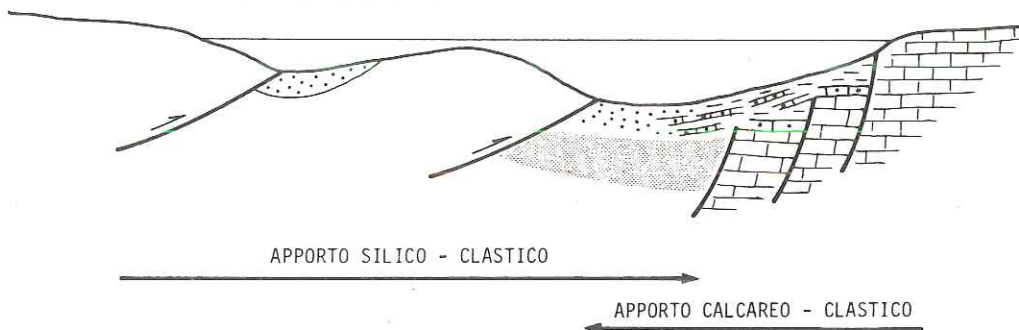


FIG. 8c - Profilo paleogeografico C-C (vedi fig. 5)

Il profilo interessa l'avanfossa ubicata in corrispondenza del Bacino di Lagonegro.

Si individuano successioni deposte in bacini di piggy-back (Flysch di Gorgoglione) con depositi silico-clastici e successioni di avanfossa in senso stretto (Formazione di Serra Palazzo) in cui sono alternati depositi silico-clastici e calcareo-clastici.

In definitiva il bacino irpino si può considerare l'avanfossa miocenica della catena appenninica in formazione, questo bacino presenta molte analogie con il Golfo di Taranto che rappresenta l'avanfossa attuale dell'Appennino (PESCATORE e SENATORE 1986).

Napoli, aprile 1988

4. Bibliografia

BOCCALETTI M., COSENTINO D., DEIANA G., GELATI R., LENTINI F., MASSARI F., MORATTI G., PESCATORE G., PORCU A., RICHETTI G., RICCI LUCCHI F., TORTORICI L., (1985). Neogene dynamics of the peri-Tyrrhenian area in an ensialic context: paleogeographic reconstruction. VIII Cong. Reg. Comm. Mediterranean Neogene Stratigraphy, Budapest, 15.22 september 1985, 307-322

CARANNANTE G., PESCATORE T., SENATORE M.R., SIMONE L. (1987). L'annegamento delle aree di avampaese miocenico e la migrazione delle facies a briozoi e litotamni (foramol) nell'Appennino meridionale.

COCCO E., CRAVERO E., ORTOLANI F., PESCATORE T., RUSSO M. SGROSSO I., TORRE M., (1972). Les facies sedimentaires du Bassin Irpinien (Italie meridionale). Att. Acc. Pontaniana, Napoli, n.s., 21, 13 p.

CROSTELLA A. & VEZZANI L. (1964) La geologia dell'Appennino Foggiano. Boll. Soc. Geol. It., 83, 121-142.

- D'ARGENIO, B., PESCATORE, T. & SCANDONE P., (1973). Schema geologico dell'Appennino meridionale (Campania, Lucania). Atti del Convegno: Moderne vedute sulla geologia dell'Appennino. Acc. Naz. Lincei, Quaderno 183, 49-72.
- D'ARGENIO, B., PESCATORE, T. & SCANDONE P., (1975). Structural pattern of the Campania Lucania Apennines. In: OGNIBEN, L., PARROTTO, M. & PRATURLON, A. (eds), Structural model of Italy. Cons. Nazion. Ric., Quaderni de "La Ricerca Scientifica", 90, 313-327.
- DAZZARO L. & RAPISARDI L., (1984). Nuovi dati stratigrafici, tettonici e paleogeografici della parte settentrionale dell'Appennino dauno. Boll. Soc. Geol. It., 103, 51-58.
- MOSTARDINI F. & MERLINI S. (1986) Appennino centro meridionale. Sezioni geologiche e proposta di modello strutturale. 73° Congr. Soc. Geol. It., Roma 30.9/4.10.86, 1-59.
- OGNIBEN L. (1969). Schema geologico introduttivo alla geologia del confine calabro lucano. Mem. Soc. Geol. It., 8, 453-763.
- OGNIBEN L., (1986). Relazione sul modello geodinamico "conservativo" della regione Italiana. ENEA, 357 p.
- ORI G.G. & FRIEND P.F. (1984) Sedimentary basins formed and carried piggyback on active thrust sheets. Geology, 12, 475-478.
- PERRONE V., (1982). Considerazioni sulla trasgressione del Miocene inferiore sulla Piattaforma Carbonatica campano-lucana. Rdc. Soc. Geol. It., 4, f. 4. 369-372.

PERRONE V. & SGROSSO I. (1981) Il Bacino Pre-Irpino: un nuovo dominio paleogeografico miocenico dell'Appennino Meridionale. Rend. Soc. Geol. It., 4, 365-368.

PESCATORE T. (1978) Evoluzione tettonica del Bacino Irpino (Italia Meridionale) durante il Miocene. Boll. Soc. Geol. It., 97, 783-805.

PESCATORE T. (1986) Evolution of a flysch basin during continental collision: Irpinian Basin, Southern Italy. Giornale di Geologia, ser.3°, 48/1-2, 121-127.

PESCATORE T. & TRAMUTOLI M. (1980) I rapporti tra i depositi del Bacino Irpino nella media valle del Basento (Lucania). Rend. Acc. Sci. Fis. Matem. della Soc. Naz. Sci. Lettere ed Arti, Napoli, 47, (4°), 19-41.

PESCATORE T. & SLACZKA A., (1984). Evolution models of two flysch basins: The Northern Carpathians and Southern Apennines, Tectonophysics, 106, 49-70.

PESCATORE T. & SENATORE M.R. (1986) A comparison between a present-day (Taranto Gulf) and a Miocene (Irpinian basin) foredeep of the Southern Apennines (Italy). Spec. Publs Int. Ass. Sediment., 8, 169-182.

SELLI, R., (1958). Sulla trasgressione del Miocene in Italia meridionale. Giorn. Geologia. s. 2. 24, 1-54.

SELLI R., (1962). Il Paleogene nel quadro della geologia dell'Italia centro-meridionale. Mem. Soc. Geol. Ital., 3, 737-789.

SENATORE M.R. (1988). Comparazione tra i depositi Plio-Pleistocenici del

Bacino di Gallipoli (Golfo di Taranto) e la successione miocenica del Flysch di Faeto (unità Irpine, Monti dell'Daunia): Confronto tra l'avanfossa attuale e quella miocenica dell'Appennino meridionale (Italia). Tesi di dottorato. Univesità di Napoli e Palermo, 317 p.

SGROSSO I. (1981) Il significato delle calciruditi di Piaggine nell'ambito degli eventi del Miocene Inferiore nell'Appennino Campano-Lucano. Boll. Soc. Geol. It., 100, 129-137.

SGROSSO I. (1983) Alcuni dati sulla possibile presenza di una quarta piattaforma carbonatica nell'Appennino centro meridionale. Rend. Soc. Geol. It., 6, 31-34.

SGROSSO I., (1986). Criteri ed elementi per una ricostruzione paleogeografica delle zone esterne dell'Appennino centro-meridionale. Atti 73° Cong. Soc. Geol. It., 167-170. Prestampa.

SGROSSO I., AMORE F.O. & RUGGIERO TADDEI E. (1988). L'inizio della sedimentazione terrigena nel Bacino Molisano. Boll. Soc. Geol. It., 107, 73-79.

INTRACELLULAR LOCALIZATION OF VANADIUM AND IRON IN THE
BRANCHIAL BASKET OF THE ASCIDIAN ASCIDIA MALACA
BY X-RAY MICROANALYSIS.

Nota di Silvia Scippa*, Giovanni Iazzetti*
and Mario de Vincentiis*

Presentata dal Socio Mario de Vincentiis

Adunanza del 7 maggio 1988

Riassunto: Osservazioni microanalitiche a raggi-X sul cestello branchiale di Ascidia malaca hanno mostrato la presenza di vanadio e ferro in granuli elettrondensi citoplasmatici delle cellule non ciliate dell'epitelio branchiale.

Abstract: X-ray microanalysis of the branchial basket of Ascidia malaca shows the presence of vanadium and iron in cytoplasmic electron dense granule of non-ciliated epithelial cells.

Introduction

Selective accumulation of vanadium and iron occurs in the blood cells of Phlebobranchiata and Stolidobranchiata ascidians, respectively^{1,2,3}. However there are several species (Phlebobranchiata) that accumulate both vanadium and, to a lesser extent, iron. These are called "transitional" species⁴. We have previously reported a very high level of vanadium and

*Il Chair of Histology and Embryology, Faculty of Sciences, University of Naples. Zoological Station of Naples, Italy.

lower quantity of iron in the blood cells of the transitional species Ascidia malaca. Moreover, these metals were found in various organs but were more concentrated in the branchial basket in which the blood cells circulate⁵.

X-ray microanalytical studies, conducted on embedded sections of A. malaca blood cells, showed that vanadium is localized in various vacuolated cells and some granular cells. Iron was found in vacuolated amoebocytes and granular cells⁶.

The aim of the present study was to investigate by X-ray microanalysis the sites of vanadium and iron localization in the branchial basket of Ascidia malaca.

Material and methods

Ascidia malaca (Phlebobranchiata) collected in the Gulf of Naples was dissected and the branchial basket was isolated and fixed in 10% neutral formalin in filtered sea water. 2 μ m stained sections were examined with the Scanning Transmission Electron Microscope (STEM) ST 100F (Siemens) equipped with an energy X-ray detector.

Results

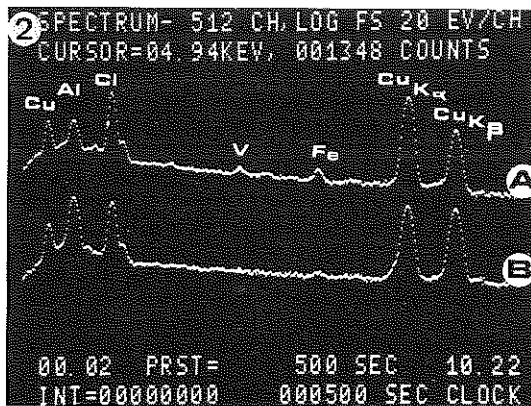
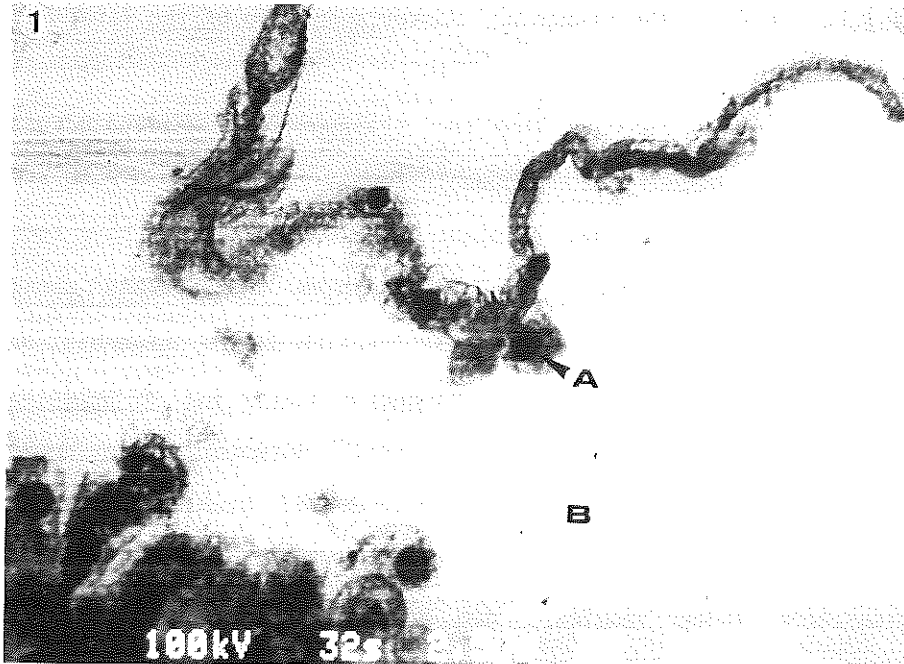
Figures 1 and 2 show a STEM micrograph of A. malaca branchial sac section and the relative X-ray spectra. The non-ciliated epithelial cells are characterized by the presence of electron dense granules (arrow). The X-ray spectrum obtained from these sites shows low vanadium and iron peaks (Fig.2A), absent in the control spectrum obtained from the resin (Fig.2B).

Discussion

This study demonstrates vanadium and iron in the electron dense granules of non ciliated cells of the A. malaca branchial basket. The absence of Na, Mg, S and K is probably due to dislocation during chemical

Fig. 1. Scanning transmission electron micrograph of a section of *Ascidia malaca* branchial basket. The non-ciliated epithelial cells examined are characterized by electron dense cytoplasmic granules.

Fig. 2. X-ray spectra of: an electron dense granule (A); the control analysis on the resin (B). The peak designated Al is due to the specimen holder of the STEM; the Cu K α and Cu K β peaks are due to the grid.



fixation. These other elements are not found when the samples are cryofixed.^{7,8,9} The detection of vanadium in non-cryofixed samples suggests that vanadium could be in a bound form. A vanadium binding substance containing a reducing sugar and an affinity for exogenous vanadium ion (V) has been reported in A. sydneiensis samea.¹⁰ Our findings indicate that the values obtained in earlier studies on the vanadium and iron content of the ascidian branchial basket^{3,5} were related not only to levels in the circulating blood cells in the gill but also to levels in some epithelial cells. Consequently, the branchial basket seems to be the first site of metal accumulation.

It has been hypothesized that the transport of vanadium across the branchial basket occurs by the ouabain-sensitive (Na⁺,K⁺)-ATPase system.¹¹ However, vanadium is a strong inhibitor of this system.¹² We have recently reported that in vitro vanadate inhibits the ouabain sensitive (Na⁺,K⁺)ATPase systems in the microsomal fraction of the branchial sac of P.mammillata and C. intestinalis (Phlebobranchiata) and M. sulcatus, S. plicata and H. papillosa (Stolidobranchiata).¹³ Moreover, these enzymatic systems are inhibited "in vitro" by vanadate.¹³ Studies on the ouabain K-NPPase of the ATPase complex in the branchial sac of C.intestinalis, a vanadium-accumulating species, did not result in a clear positive enzymatic reaction, whereas the reaction was detected in non-ciliated cells of the longitudinal bars of S.plicata, an iron-accumulating species.¹⁴ Thus the present results suggest that the negative histochemical findings obtained with the C. intestinalis gill could also be due to the in vivo interference of vanadium in the non-ciliated gill cells, which presumably occurs in other species that belong to the Phlebobranchiata suborder.

We thank Mr.G.Hubert for technical assistance in the Department of Electron Microscopy of Siemens Laboratory in Karlsruhe (F.R.G.).

References

1. Bieligg H.J., Joste E., Pflieger K., Rummel W. and Seifen E. - 1961 - Aufnahme und Verteilung von Vanadin bei der Tunicate Phallusia mammillata Cuvier. Hoppe Seiler's Z. Physiol. Chem., 325:122-131
2. Bieligg H.J., Pflieger K., Rummel W. and Seifen E. - 1961 - Aufnahme und Verteilung von Vanadin bei der Tunicate Ciona intestinalis L. Hoppe Seiler's Z. Physiol. Chem., 326:249-258
3. Michibata H., Terada T., Anada N., Yamakawa K. and Numakunai T. - 1986 - The accumulation and distribution of vanadium, iron and manganese in some solitary ascidians. Biol. Bull., 171:672-681
4. Swinehart J.H., Biggs W.R., Halko D.J. and Schroeder N.C. - 1974 - The vanadium and selected metal contents of some Ascidians. Biol. Bull., 146:302-312
5. Botte L. and Scippa S. - 1979 - Vanadium and other metals in Ascidia malaca. Annot. nes Zool. Japonenses, 52:188-190
6. Scippa S., Botte L. and de Vincentiis M. - 1982 - Ultrastructure and X-ray microanalysis of blood cells of Ascidia malaca. Acta Zool. (Stockh.), 63:121-131
7. Hall T.H. - 1979 - Biological X-ray microanalysis. J. Microsc., 117:145-163
8. Moreton R.B. - 1981 - Electron-probe X-ray microanalysis: techniques and recent applications in biology. Biol. Rev., 56:409-461
9. Scippa S., Zierold K. and M. de Vincentiis - 1988 - X-ray microanalytical studies on cryofixed blood cells of the ascidian Phallusia mammillata. II. Elemental composition of the various blood cell types. J.Submicrosc. Cytol. Pathol., 20:719-730
10. Michibata H. Miyamoto T. and Sakurai H. - 1986 - Purification of vanadium binding substance from the blood cells of the tunicate Ascidia sydneiensis samea. Biochem. Biophys. Res. Commun., 141:251-257
11. Rummel W., Bieligg H.J., Forth W., Pflieger K., Rudiger W. and Seifen E. - 1968 - Absorption and accumulation of vanadium by tunicates. Protides Biol. Fluids Proc. Colloq., 14:205-210
12. Cantley, L.C., Josephson L., Warner R., Yanagisawa M., Lechene C. and Guidotti G. - 1977 - Vanadate is a potent (Na,K)-ATPase inhibitor found in ATP derived from muscle. J. Biol. Chem., 252:7421-7423
13. Kono T., Scippa S., Iazzetti G. and de Vincentiis M. - 1987 - Ionic dependence and vanadate sensitivity of (Na',K')-ATPase isolated from branchial sac of ascidians. Comp. Biochem. Physiol., 88B:85-89
14. Scippa S., Botte L., Gualtieri R., Iazzetti G. and de Vincentiis M. - 1981 - Ultracytochemical localization of ouabain-sensitive, potassium-dependent p-nitrophenyl-phosphatase (K-NPPase) activity in the branchial basket of ascidians. Acta Embryol. Morph. Exper. n.s., 2, XXXIV

θ -CONVERGENZA E NOZIONI DI CONTINUITA' PER MULTIFUNZIONI AD ESSA COLLEGATE

Nota di Margherita Di Iorio ^(*)

Presentata dal Socio Ordinario Donato Greco

Adunanza del 7 maggio 1988

Riassunto. Scopo di questo lavoro è quello di studiare e confrontare alcune forme di continuità per multifunzioni tra spazi di convergenza.

Abstract. The purpose of the present paper is to study some "continuity notions" for multifunctions and their relationships in terms of continuity between convergence spaces.

Sono note in letteratura varie forme di continuità per funzioni tra spazi topologici: alcune di esse come la faint-continuità (Long-Herrington [8], Noiri [11]), θ -continuità (Fomin [5], Arya Deb [1]) sono forme "deboli", mentre la strong θ -continuità (Noiri [10], Long-Herrington [7]) è una forma "forte". Più recentemente, in quest'ambito, Di Concilio-Naimpally [3] hanno anche messo in luce il legame tra la θ -continuità e la θ -convergenza introdotta da Velicko [14], Hamlett [6].

In quest'ordine di idee ci siamo proposti di studiare e confrontare forme analoghe di continuità per multifunzioni e il loro legame con la θ -convergenza. Introdotta una opportuna convergenza $\mathcal{G}$ sullo spazio 2^X dei sottoinsiemi chiusi e non vuoti di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$, abbiamo evidenziato la sua relazione con la topologia finita su 2^X generata da (X, T_θ) , dove T_θ è la topologia associata a θ . Ne abbiamo dedotto il legame, nel caso delle multifunzioni, tra la nozione di θ -continuità e la nozione di continuità fra spazi di convergenza. In quest'ottica abbiamo affrontato anche lo studio della strong θ -continuità e della faint-continuità ritrovando risultati già noti nel caso delle funzioni.

Notazioni e simboli

E' noto che (cfr. Choquet [2]) una convergenza σ su un insieme X è una applicazione $\lim^\sigma$ dell'insieme $\mathcal{F}$ dei filtri ψ su X nell'insieme delle parti di X .

Lavoro eseguito nell'ambito di un progetto nazionale di ricerca finanziato con fondi 40 % M.P.I.

(*) Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli". Facoltà di Ingegneria. Via Claudio 21.80125 Napoli.

Se $x \in \lim^\sigma \psi$ scriveremo $\psi \xrightarrow{\sigma} x$. La coppia (X, σ) dicesi allora spazio di convergenza.

Una convergenza σ dicesi pretopologica se, definito per ogni $x \in X$ il filtro degli intorni di x come

$$N(x) = \bigcap \{ \psi \in \Psi : \psi \xrightarrow{\sigma} x \}$$

risulta

- 1) per ogni $x \in X$ il filtro generato da $\{x\}$ converge ad x
- 2) se $\psi \xrightarrow{\sigma} x$ e $\psi \subset \psi'$ allora $\psi' \xrightarrow{\sigma} x$
- 3) se $\psi \not\xrightarrow{\sigma} x$ esiste $\psi' \supset \psi$ tale che se $\psi'' \supset \psi'$ si ha $\psi'' \not\xrightarrow{\sigma} x$
- 4) per ogni $x \in X$ $N(x) \xrightarrow{\sigma} x$

Se $(X, \mathcal{Z})$ è uno spazio topologico, com'è d'uso, denoteremo con 2^X lo spazio dei sottoinsiemi chiusi e non vuoti di X . È noto che su 2^X possono introdursi le classiche topologie di Vietoris, più precisamente la topologia semifinita superiore V^+ è la topologia su 2^X di base $\{A \in 2^X : A \subset W\}$ con W aperto in $(X, \mathcal{Z})$ e la topologia semifinita inferiore V^- è la topologia su 2^X di sottobase $\{A \in 2^X : A \cap W \neq \emptyset\}$ con W aperto in $(X, \mathcal{Z})$. Dicesi topologia finita V la topologia $V^+ \vee V^-$ su 2^X di base $\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{T \in 2^X : T \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ e } T \cap U_i \neq \emptyset \text{ } i=1..n\}$ con $U_1, \dots, U_n$ aperti in $(X, \mathcal{Z})$ (cfr. Michael [9]).

Se F è una multifunzione di $(X, \mathcal{Z})$ in $(Y, \mathcal{Z}')$ a valori chiusi, diremo che (cfr. Michael) F è semicontinua inferiormente (s.c.i.) [risp. semicontinua superiormente (s.c.s.)] se considerata come funzione di $(X, \mathcal{Z})$ in $(2^Y, V^-)$ [risp. in $(2^Y, V^+)$] è continua.

Se f è una funzione di (X, θ) in (Y, σ) con θ e σ convergenze su X e Y , si dice che f è continua se per ogni net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ su X tale che $x_\alpha \xrightarrow{\theta} x$ risulta $f(x_\alpha) \xrightarrow{\sigma} f(x)$.

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{Z})$ dicesi θ -compatto se soddisfa alle seguenti condizioni:

- 1) da ogni ricoprimento aperto (A_i) di X se ne può estrarre uno finito $(A_i)_{i \in I}$ tale che $X \subseteq \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$ ($\bar{A}_i$ denota la chiusura di A_i in $(X, \mathcal{Z})$)
- 2) (proprietà di Urysohn) per ogni coppia di punti di X distinti x, y esistono un intorno U di x ed uno V di y le cui chiusure sono tra loro disgiunte.

1.-

Sia $(X, \mathcal{Z})$ uno spazio topologico. Un filtro ψ su X dicesi θ -convergente ad un punto x di X se ψ contiene la famiglia degli intorni chiusi di x .

La convergenza θ in generale non è topologica ma solo pretopologica (cfr. Di Concilio Naimpally [3]) ed è topologica se X è θ -compatto (cfr. Velicko [14]).

La topologia T_θ associata a θ è, come è noto, la topologia in cui gli insiemi aperti sono i sottoinsiemi G di X tali che per ogni $x \in G$ e per ogni filtro ψ

θ -convergente ad x risulta $G \in \psi$. E' facile verificare che tali insiemi sono i θ -aperti (cfr. Long-Herrington [8]) caratterizzati dalla proprietà che per ogni punto x di G , esiste un intorno chiuso di x contenuto in G .

In generale $T_\theta \subseteq \mathcal{T}$ e coincidono se e solo se $(X, \mathcal{T})$ è regolare.

A partire dalla convergenza θ su X introduciamo una convergenza $\tilde{\theta}$ su 2^X nel seguente modo

DEF. Se $(K_\alpha)_{\alpha \in D}$ è un net in 2^X e K è un elemento di 2^X diremo che $K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta}^-)$ se per ogni aperto W soddisfacente $W \cap K \neq \emptyset$ esiste $\bar{\alpha} \in D$ tale che $K_\alpha \cap \bar{W} \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \succ \bar{\alpha}$

$K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta}^+)$ se per ogni aperto W soddisfacente $W \supset K$ esiste $\bar{\alpha} \in D$ tale che $K_\alpha \subset \bar{W}$ per ogni $\alpha \succ \bar{\alpha}$

$K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta})$ se $K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta}^-)$ e $K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta}^+)$

Ricordando che se $(X, \mathcal{T})$ è T_1 (cfr. Michael [9]) o più in generale R_0 (cfr Nrshevich [12]) e $U_1, \dots, U_n$ sono insiemi aperti, nella topologia di Vietoris risulta $cl_V \langle U_1, \dots, U_n \rangle = \langle \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_n \rangle$ dove cl_V è la chiusura in $(2^X, V)$, si ha facilmente che

PROP. 1.1- Se $(X, \mathcal{T})$ è T_1 , oppure R_0 $\tilde{\theta}$ è la θ -convergenza su $(2^X, V)$ e quindi $\tilde{\theta}$ è pretopologica

Osserviamo ora che a partire da (X, T_θ) si possono costruire su 2^X la topologia semifinita superiore $V_{T_\theta}^+$ di base $\{ A \in 2^X : A \subset W \}$ con W θ -aperto e la semifinita inferiore $V_{T_\theta}^-$ di sottobase $\{ A \in 2^X : A \cap W \neq \emptyset \}$ con W θ -aperto. Confrontiamo le convergenze $\tilde{\theta}^+$ e $\tilde{\theta}^-$ con quelle indotte da $V_{T_\theta}^+$ e $V_{T_\theta}^-$. Se $K \in 2^X$ e $(K_\alpha)_{\alpha \in D}$ è un net in 2^X si dimostra che

PROP. 1.2 Se $K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta}^-)$ allora $K_\alpha \rightarrow K (V_{T_\theta}^-)$

Se $K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta}^+)$ e K è compatto allora $K_\alpha \rightarrow K (V_{T_\theta}^+)$

DIM. Se W è θ -aperto e $W \cap K \neq \emptyset$, preso $y \in W \cap K$ esiste un intorno aperto U di y tale che $y \in U \subset \bar{U} \subset W$. Poiché $U \cap K \neq \emptyset$ esiste $\bar{\alpha} \in D$ tale che $K_\alpha \cap \bar{U} \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \succ \bar{\alpha}$. Risulta quindi $K_\alpha \cap W \neq \emptyset$ per $\alpha \succ \bar{\alpha}$.

Sia ora W θ -aperto e $K \subset W$. Per ogni $k \in K$ esiste un aperto U_k tale che $k \in U_k \subset \bar{U}_k \subset W$. La famiglia $(U_k)_{k \in K}$ costituisce allora un ricoprimento aperto di K compatto. Esistono quindi $k_1, \dots, k_n$ in K per cui $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{k_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_{k_i} \subset W$. Per l'ipotesi fatta esiste $\bar{\alpha} \in D$ tale che $K_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^n U_{k_i} \subset W$ per $\alpha \succ \bar{\alpha}$ e quindi l'asserto.

Per quanto riguarda le implicazioni inverse sussistono le seguenti proposizioni:

PROP. 1.3 Se X è θ -compatto e K compatto

$$K_\alpha \rightarrow K (V_{T_\theta}^+) \Rightarrow K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta}^+)$$

DIM. Sia W un aperto $W \supset K$ e $y \in K$. Essendo X uno spazio di Urysohn per ogni $x \notin K$ esiste W_x^y aperto tale che $y \notin \overline{W_x^y}$. Dalla relazione $X = W \cup \bigcup_{x \notin K} W_x^y$ segue che, esistendo dei punti $x_1, \dots, x_n \notin K$ tali che $X = \overline{W} \cup \bigcup_{i=1}^n \overline{W_{x_i}}$ risulta $K \subseteq \bigcup_{y \in K} \left(\bigcap_{i=1}^n \overline{W_{x_i}} \right)$. Possiamo quindi determinare $y_1, \dots, y_m \in K$ tali che $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcap_{i=1}^n \overline{W_{x_i}^{y_j}} \right)$. Osservando che l'insieme $A = \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcap_{i=1}^n \overline{W_{x_i}^{y_j}} \right)$ è un θ -aperto contenuto in $\overline{W}$ e contenente K si ha che esiste $\bar{\alpha} \in D$ tale che $K_\alpha \subset A \subset \overline{W}$ per $\alpha \geq \bar{\alpha}$ e quindi l'asserto.

PROP. 1.4 Se X è θ -compatto, $K_\alpha \rightarrow K (V_{T_\theta}^-) \Rightarrow K_\alpha \rightarrow K (\tilde{\theta}^-)$

DIM. Sia W un aperto tale che $W \cap K \neq \emptyset$ e sia $y \in W \cap K$. Ripetendo il ragionamento precedente possiamo determinare A θ -aperto tale che $\{y\} \subset A \subset \overline{W}$ esiste pertanto $\bar{\alpha} \in D$ tale che $K_\alpha \cap \overline{W} \neq \emptyset$ per $\alpha \geq \bar{\alpha}$.

Tenendo presente le proposizioni precedenti possiamo concludere che

PROP. 1.5 Se X è θ -compatto, sull'insieme delle parti compatte di X $\tilde{\theta}$ è topologica e coincide con V_{T_θ} .

2. θ -continuità

Siano (X, τ) e (Y, τ') due spazi topologici. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ dicesi θ -continua in $x_0 \in X$ (cfr. Fomin [5], Arya Deb [1], Di Concilio -Naimpally [3]) se per ogni intorno W di $f(x_0)$ esiste un intorno I di x_0 tale che $f(\overline{I}) \subset W$.

Se $F: X \rightarrow Y$ è una multifunzione, diremo

F θ -semicontinua inferiormente (θ -s.c.i.) in $x_0 \in X$ se per ogni aperto $W \subseteq Y$ verificante $W \cap F(x_0) \neq \emptyset$ esiste un intorno I di x_0 tale che $F(z) \cap \overline{W} \neq \emptyset$ per ogni $z \in \overline{I}$.

F θ -semicontinua superiormente (θ -s.c.s.) in $x_0 \in X$ se per ogni aperto $W \subseteq Y$, $W \supset F(x_0)$ esiste un intorno I di x_0 tale che $F(z) \subset \overline{W}$ per ogni $z \in \overline{I}$.

F θ -continua in x_0 se F è θ -s.c.i. e θ -s.c.s. in x_0

F θ -continua (θ -s.c.i. ; θ -s.c.s.) in X se ha questa proprietà in ogni $x \in X$

Si dimostra facilmente che

TEOR. 2.1 F θ -s.c.i. in $x_0 \iff$ per ogni net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ $x_\alpha \xrightarrow{\theta} x_0$ in X risulta $F(x_\alpha) \xrightarrow{\theta^-} F(x_0)$

DIM. Sia $W \subseteq Y$ aperto e $W \cap F(x_0) \neq \emptyset$. Esiste allora un intorno I di x_0 tale che $F(z) \cap \overline{W} \neq \emptyset$ per $z \in \overline{I}$; poiché $x_\alpha \xrightarrow{\theta} x_0$ esisterà $\bar{\alpha} \in D$ tale che $x_\alpha \in \overline{I}$ non

appena sia $\alpha \geq \bar{\alpha}$ e quindi per tali valori di α $F(x_\alpha) \cap \bar{W} \neq \emptyset$.

Viceversa, se per assurdo non fosse F θ -s.c.i. in x_0 esisterebbe un aperto W tale che $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$ e per ogni intorno I di x_0 esisterebbe $z_I \in \bar{I}$ per cui $F(z_I) \cap \bar{W} \neq \emptyset$. Ordinando il filtro $N(x_0)$ degli intorni di x_0 mediante l'inclusione inversa si otterrebbe un net (z_I) θ -convergente a x_0 mentre $F(z_I) \cap \bar{W} \neq \emptyset$.

Possiamo ancora mostrare che

TEOR. 2.2 F θ -s.c.s. in $x_0 \iff$ per ogni net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ $x_\alpha \xrightarrow[\theta^+]{\theta} x_0$ in X risulta $F(x_\alpha) \xrightarrow[\theta^+]{\theta} F(x_0)$

DIM. Se $W \supset F(x_0)$ esiste un intorno I di x_0 tale che $F(z) \subset \bar{W}$ per ogni $z \in \bar{I}$; poiché $x_\alpha \xrightarrow[\theta^+]{\theta} x_0$ esiste $\bar{\alpha} \in D$ tale che $x_\alpha \in \bar{I}$ per $\alpha \geq \bar{\alpha}$ e quindi $F(x_\alpha) \subset \bar{W}$ per tali valori di α . Viceversa se F non fosse θ -s.c.s. in x_0 esisterebbe un aperto $W \supset F(x_0)$ e per ogni intorno I di x_0 esisterebbe $z_I \in \bar{I}$ tale che $F(z_I) \not\subset \bar{W}$. Ordinando allora opportunamente il filtro degli intorni di x_0 , si otterrebbe un net (z_I) θ -convergente ad x_0 mentre $F(z_I) \not\subset \bar{W}$.

Da tali teoremi consegue che

PROP. 2.3 F θ -s.c.i. se e solo se F come funzione di (X, θ) in $(2^Y, \tilde{\theta}^-)$ è continua.

F θ -s.c.s. se e solo se F come funzione di (X, θ) in $(2^Y, \tilde{\theta}^+)$ è continua

e in virtù della prop.1.2

Se F è θ -s.c.i. allora F come funzione di (X, θ) in $(2^Y, V_{T_\theta}^-)$ è continua.

Se F è θ -s.c.s. ed $F(x)$ è compatto per ogni $x \in X$ allora F come funzione di (X, θ) in $(2^Y, V_{T_\theta}^+)$ è continua.

Ricordando che è d'uso definire per una multifunzione le nozioni di immagine reciproca di un insieme $A \subseteq Y$ nel seguente modo

$$F^-(A) = \{ z \in X : F(z) \cap A \neq \emptyset \}$$

$$F^+(A) = \{ z \in X : F(z) \subset A \}$$

possiamo concludere che:

se F è θ -s.c.i. allora per ogni θ -aperto $A \subseteq Y$ $F^-(A)$ è θ -aperto

se F è θ -s.c.s. ed $F(x)$ è compatto $\forall x \in X$, allora per ogni θ -aperto $A \subseteq Y$ $F^+(A)$ è θ -aperto.

E' facile verificare che

TEOR.2.4 Se F è continua allora F è θ -continua

DIM. Se $x_0 \in X$ e W è un aperto contenuto in Y per cui $W \cap F(x_0) \neq \emptyset$ risulta

$\{x \in X : F(x) \cap W \neq \emptyset\} \subseteq \{x \in X : F(x) \cap \bar{W} \neq \emptyset\}$. Ne segue che $\{x \in X : F(x) \cap \bar{W} \neq \emptyset\}$ è un intorno chiuso di x_0 . Se $W \supset F(x_0)$ risulta invece $\{x \in X : F(x) \subset W\} \subseteq \{x \in X : F(x) \subset \bar{W}\}$ e quindi $\{x \in X : F(x) \subset \bar{W}\}$ è un intorno chiuso di x_0 .

TEOR.2.5 Se Y è regolare F è s.c.i. se e solo se F è θ -s.c.i., se inoltre $F(x)$ è compatto per ogni $x \in X$ risulta anche F s.c.s. se e solo se F è θ -s.c.s..

DIM. Se $(Y, \mathcal{Z}')$ è regolare, la topologia $T_\theta = \mathcal{Z}'$ e quindi la topologia $V_{T_\theta}^-$ su 2^Y coincide con la Vietoris inferiore V^- . Sia $x_0 \in X$ e F θ -s.c.i. in x_0 . Se $x_\alpha \rightarrow x_0$ risulta anche $x_\alpha \xrightarrow{\theta} x_0$ e per la prop.2.1 $F(x_\alpha) \xrightarrow{\tilde{\theta}^-} F(x_0)$. In virtù della prop.1.2 risulta anche $F(x_\alpha) \rightarrow F(x_0)$ in $V_{T_\theta}^- = V^-$. Ne segue che F è s.c.i. in x_0 . Procedendo analogamente se F è θ -s.c.s. in x_0 e $x_\alpha \rightarrow x_0$ risulta $x_\alpha \xrightarrow{\theta} x_0$ e quindi per la 2.2 $F(x_\alpha) \xrightarrow{\tilde{\theta}^+} F(x_0)$. In virtù della 1.2 essendo $F(x_0)$ compatto risulta anche $F(x_\alpha) \rightarrow F(x_0)$ in $V_{T_\theta}^+ = V^+$ e quindi F è s.c.s. in x_0 .

Ne segue che per le funzioni ad un sol valore di X in Y con Y regolare le nozioni di θ -continuità e di continuità coincidono (cfr. Di Concilio [4]).

E' già nota (cfr. Popa [13]) la definizione di weak-continuità per multi-funzioni. Più precisamente se $F: X \rightarrow Y$ è una multifunzione con $(X, \mathcal{Z})$ e $(Y, \mathcal{Z}')$ spazi topologici e $x_0 \in X$ dicesi:

F weakly-semicontinua inferiormente (w-s.c.i.) in x_0 se per ogni aperto $W \subseteq Y$ per cui $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$ esiste un intorno I di x_0 tale che $F(x) \cap \bar{W} \neq \emptyset$ per ogni $x \in I$

F weakly-semicontinua superiormente (w-s.c.s.) in x_0 se per ogni aperto $W \subseteq Y$ $W \supset F(x_0)$ esiste un intorno I di x_0 tale che $F(x) \subset \bar{W}$ per ogni $x \in I$

F weakly-continua in x_0 se F è w-s.c.i. e w-s.c.s. in x_0

F weakly-continua (w-s.c.i., w-s.c.s.) se ha questa proprietà per ogni x . Evidentemente la s.c.i. (risp. s.c.s.) implica la w-s.c.i. (risp w-s.c.s.). E' facile osservare anche che F θ -s.c.i. $\Rightarrow F$ w-s.c.i. e che F θ -s.c.s. $\Rightarrow F$ w-s.c.s.. Inoltre si ha

PROP.2.6. F w-s.c.i. $\Leftrightarrow F$ come funzione di $(X, \mathcal{Z})$ in $(2^Y, \tilde{\theta}^-)$ è continua
 F w-s.c.s. $\Leftrightarrow F$ come funzione di $(X, \mathcal{Z})$ in $(2^Y, \tilde{\theta}^+)$ è continua

Questo ci permette di dedurre facilmente i risultati di Popa da quelli sulle multifunzioni θ -continue.

In particolare osserviamo che dai teoremi 2.4 e 2.5 seguono i seguenti risultati

PROP.2.7 (Popa) Se $F: X \rightarrow Y$ è una multifunzione e Y è regolare le nozioni di s.c.i. e w-s.c.i. coincidono.

Se $F(x)$ è finito coincidono anche le nozioni di s.c.s. e w-s.c.s.

DIM. Se F è w-s.c.i. in $x_0 \in X$ e $x_\alpha \rightarrow x_0$, risulta per la 2.6 $F(x_\alpha) \xrightarrow{\theta^-} F(x_0)$ e questo per la regolarità di Y implica che $F(x_\alpha) \rightarrow F(x_0)$ nella Vietoris inferiore. In modo analogo si ragiona per la Vietoris superiore osservando che se $F(x_0)$ è finito in particolare è compatto.

3. Strong θ -continuità

Questa nozione è stata introdotta da Noiri, Long-Herrington (cfr. [7], [10]) per funzioni di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ in uno spazio topologico $(Y, \mathcal{T}')$ nel modo seguente: $f: X \rightarrow Y$ è strongly θ -continua in $x_0 \in X$ se per ogni aperto W contenente $f(x_0)$ esiste un aperto U contenente x_0 tale che $f(\overline{U}) \subset W$.

Dopo aver osservato che questo equivale a dire che per ogni aperto W contenente $f(x_0)$ esiste un θ -aperto U contenente x_0 tale che $f(U) \subset W$, possiamo concludere che f è strongly θ -continua se e solo se $f: (X, T_\theta) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ è continua.

Nel modo usuale si estende questa definizione ad una multifunzione $F: X \rightarrow Y$ dicendo

DEF. F strongly θ -semicontinua superiormente (strongly θ -s.c.s.) in $x_0 \in X$ se per ogni aperto $W \subseteq Y$ $W \supset F(x_0)$ esiste un intorno I di x_0 tale che $F(\overline{I}) \subset W$

F strongly θ -semicontinua inferiormente (strongly θ -s.c.i.) in $x_0 \in X$ se per ogni aperto $W \subseteq Y$ tale che $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$ esiste un intorno I di x_0 tale che $F(x) \cap W \neq \emptyset$ per ogni $x \in \overline{I}$

F strongly θ -continua in x_0 se F è strongly θ -s.c.i. e strongly θ -s.c.s. in x_0

F strongly θ -continua (strongly θ -s.c.i., strongly θ -s.c.s.) se F è tale in ogni punto di X .

Tale definizione è equivalente alla seguente:

F strongly θ -s.c.i. (risp. strongly θ -s.c.s.) in x_0 se per ogni aperto $W \subseteq Y$ soddisfacente $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$ (risp. $W \supset F(x_0)$) esiste un θ -aperto U contenente x_0 tale che $F(x) \cap W \neq \emptyset$ (risp. $F(x) \subset W$) per ogni $x \in U$.

Da tale considerazione segue che

F strongly θ -s.c.i. $\iff F$ come funzione di (X, T_θ) in $(2^Y, V^-)$ è continua

F strongly θ -s.c.s. $\iff F$ come funzione di (X, T_θ) in $(2^Y, V^+)$ è continua

F strongly θ -cont. $\iff F$ come funzione di (X, T_θ) in $(2^Y, V)$ è continua

A tali multifunzioni si estendono quindi i risultati già noti per multifunzioni semicontinue fra spazi topologici.

E' interessante osservare che valgono le seguenti implicazioni:

F strongly θ -s.c.i. $\implies F$ s.c.i.

F strongly θ -s.c.s. $\implies F$ s.c.s.

E' ovvio che le implicazioni inverse in generale non sussistono, vale però il seguente teorema

TEOR.3.1 Sia $F: X \rightarrow Y$ una multifunzione continua. Se Y è regolare e T_1 ed $F(x)$ compatto per ogni $x \in X$, allora F è strongly θ -continua.

DIM. Sia $A \subseteq Y$ un aperto $A \supset F(x_0)$ dove x_0 è un punto di X . Essendo Y regolare e T_1 ed $F(x_0)$ compatto esiste un aperto $W \subseteq Y$ tale che $F(x_0) \subset W \subset \bar{W} \subset A$. Dalla inclusione $\{x \in X: F(x) \subset W\} \subset \{x \in X: F(x) \subset \bar{W}\}$ e dalla continuità della multifunzione si ricava che se si pone $U = \{x \in X: F(x) \subset W\}$ risulta $x_0 \in U$ e $F(\bar{U}) \subset A$ e quindi resta provata la strongly θ -s.c.s.. D'altro canto se $y \in A \cap F(x_0) \neq \emptyset$ sia $y \in A \cap F(x_0)$, per la regolarità di Y esiste un aperto W_y contenente y per cui $\bar{W}_y \subset A$. Dalla inclusione $\{x \in X: F(x) \cap W_y \neq \emptyset\} \subset \{x \in X: F(x) \cap \bar{W}_y \neq \emptyset\}$ e dalla continuità della multifunzione si ricava che posto $U = \{x \in X: F(x) \cap W_y \neq \emptyset\}$ risulta $x_0 \in U$ e $F(x) \cap A \neq \emptyset$ per ogni x in $\bar{U}$.

4. Faint continuità

Ricordiamo che se $(X, \mathcal{Z})$ e $(Y, \mathcal{Z}')$ sono due spazi topologici, una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice faintly-continua in un punto x_0 di X (cfr. Long-Herrington [8], Noiri [11]) se per ogni θ -aperto W contenente $f(x_0)$ esiste un intorno I di x_0 tale che $f(I) \subset W$.

La naturale estensione alle multifunzioni dà la seguente definizione

DEF. Sia F una multifunzione di X in Y dicesi

F faintly -semicontinua inferiormente (f.s.c.i.) [risp. faintly-semicontinua superiormente (f.s.c.s.)] in $x_0 \in X$ se per ogni θ -aperto A verificante $A \cap F(x_0) \neq \emptyset$ [risp. $A \supset F(x_0)$] esiste un intorno I di x_0 tale che $F(x) \cap A \neq \emptyset$ [risp. $F(x) \subset A$] per ogni $x \in I$.

F faintly continua in x_0 se F è f.s.c.i. e f.s.c.s. in x_0

F faintly continua (f.s.c.i. ; f.s.c.s.) se è tale in ogni punto x di X .

E' ovvio che

PROP.4.1 F f.s.c.i. $\iff F$ come funzione di $(X, \mathcal{Z})$ in $(2^Y, \mathcal{V}_{T_\theta}^-)$ è continua
 F f.s.c.s. $\iff F$ come funzione di $(X, \mathcal{Z})$ in $(2^Y, \mathcal{V}_{T_\theta}^+)$ è continua
 F f. cont. $\iff F$ come funzione di $(X, \mathcal{Z})$ in $(2^Y, \mathcal{V}_{T_\theta})$ è continua

In base alle osservazioni precedenti è facile dedurre che

PROP. 4.2 F s.c.i. [risp. F s.c.s.] $\implies F$ f.s.c.i. [risp. F f.s.c.s.]

PROP.4.3 Se Y è regolare le nozioni di faintly continuità e di continuità coincidono.

Avendo osservato che una multifunzione faintly -s.c.i. (risp. faintly -s.c.s.) di $(X, \mathcal{C})$ in $(Y, \mathcal{C}')$ non è altro che una multifunzione s.c.i. (risp. s.c.s.) di $(X, \mathcal{C})$ in (Y, T_θ) , non presenta alcuna difficoltà l'estensione alle multifunzioni f.s.c.i. o f.s.c.s. dei classici teoremi sulle multifunzioni semi continue.

In particolare osserviamo che

PROP.4.4 Per una multifunzione $F: X \rightarrow Y$ sono equivalenti le seguenti proposizioni:

- 1) F f.s.c.i.
- 2) per ogni θ -aperto $A \subseteq Y$ $F^-(A)$ è un aperto
- 3) per ogni $x \in X$ e per ogni net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tale che $x_\alpha \rightarrow x$ risulta $F(x_\alpha) \rightarrow F(x)$ in $V_{T_\theta}^-$
- 4) per ogni θ -chiuso $A \subseteq Y$ $F^+(A)$ è chiuso

Analoghi teoremi si possono ottenere nel caso di F f.s.c.s.

E' facile ancora osservare che se la multifunzione F ha valori compatti sussistono le seguenti implicazioni:

F θ -continua $\implies F$ weakly continua $\implies F$ faintly continua
la prima delle quali è stata già provata nel §2 ; per quanto riguarda la seconda basta ricordare le prop. 2.6 , 4.1 e la 1.2.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Shashi Arya-Mamata Deb, On θ -continuous mappings. The Mathematics Student vol. XLII 1, 81-89
- [2] G. Choquet, Convergences. Annales Univ. Grenoble 23 (1948), 57-112
- [3] A. Di Concilio-S. Naimpally, A nearness approach to extension problems. Memorie di Matematica. Rend. Acc.Naz. Scienze detta dei XL 105 (1987) 11
- [4] A. Di Concilio, On θ -continuous convergence in function spaces. Rendiconti di Roma 1 (1984)
- [5] S. Fomin, Extensions of topological spaces. Ann. Math. 44 (1943), 471-480
- [6] T.R. Hamlett, H-closed spaces and the associated θ -convergence spaces. Math. Chronicle 8 (1979), 83-88
- [7] P.E. Long-L.L. Herrington, Strongly θ -continuous functions. J. Korean Math. Soc. 18 No. 1 (1981), 21-28
- [8] P.E. Long-L.L. Herrington, The T_θ -topology and faintly continuous functions Kyungpook Math. J. 22 (1982)

- [9] E. Michael, Topologies on spaces of subsets. Trans.Amer.Math.Soc. 71 (1951)
- [10] T. Noiri, On δ -continuous functions. J. Korean Math.Soc.No.2 (1980),161-66
- [11] T. Noiri, Faint continuity and set connectedness. Kyungpook Math. J. 24 (1984), 173-178
- [12] N. Nrshevich, Some properties of the space 2^X for a topological R_0 -space Russian Mat. Surveys 34, 6 (1979), 188-193
- [13] V. Popa, Weakly Continuous Multifunctions. B.U.M.I. 15 A (1978), 379-388
- [14] N.V. Velicko, H-closed topological spaces . A.M.S. Transl.78 (1968),103-118.

ON THE STABILITY OF A ROTATING FLUID

WITH PRANDTL NUMBERS LESS THAN 1

Nota di G.Mulone

Presentata dal Socio Salvatore Rionero

Adunanza del 4/06/88

Riassunto Si studia con il secondo metodo di Lyapunov la stabilita' non lineare del problema di Bénard rotante per una miscela binaria con numeri di Prandtl o di Schmidt minori di 1.

Abstract It is studied with the Lyapunov second method the nonlinear stability of the rotating Bénard problem for a binary mixture with Prandtl or Schmidt numbers less than 1.

1. INTRODUCTION

In recent papers, [1-2], Rionero and Mulone, give a guideline on how to choose a suitable Lyapunov function in order to study the nonlinear stability of the rotating Bénard problem for a homogeneous fluid and for a binary mixture and to obtain results as close as possible to the linear ones. In particular, in [1], for Prandtl numbers greater than 1 and for Taylor numbers in the interval $[0, 80\pi^4]$, they prove that the conditions which assure the linear stability of the motionless state with linear

temperature profile for a homogeneous fluid assure also its nonlinear conditional (asymptotic exponential) stability with respect to the Lyapunov function adopted (a norm equivalent to the norm of the Sobolev space W_2^1). In [2], they show that the stability conditions obtained in [1] for a homogeneous fluid are sufficient for the nonlinear stability of the rotating Bénard problem for a binary mixture and prove the coincidence of the linear and nonlinear stability parameters for Prandtl and Schmidt numbers greater than 1 and Taylor numbers in the interval $[0, 80\pi^4]$, while for Taylor numbers $\geq 80\pi^4$ they prove the stabilizing effect of rotation on the convection.

The linear stability of the rotating Bénard problem for a binary mixture has been studied for any Prandtl number P_r and Schmidt number P_c by [3] and [4] in the case of a mixture heated and salted below. Some nonlinear results for bi-dimensional perturbations are obtained by "perturbation method" in [4]. In the particular case of a homogeneous fluid the linear stability has been studied by [5] while the nonlinear stability has been studied by perturbation method in [6] and by the Lyapunov method in [7]. When the marginal state is oscillatory (cfr. [4] and [5]) it has been found that for disturbances of finite amplitude, subcritical instability is possible, which means that the system first becomes unstable to finite amplitude disturbances before it becomes unstable to infinitesimal disturbances.

The aim of this paper is to study with the rigorous Lyapunov second method and for tri-dimensional perturbations

the nonlinear stability of the rotating Bénard problem for a binary mixture in the case when the Prandtl or Schmidt numbers are less than 1, (this is for example the important physical case of the binary liquid metals,[3]). Precisely, by following the guidelines of [1-2], and using the Lyapunov function introduced in [2], I prove the stabilizing effect of rotation on the onset of convection and show that subcritical instability is possible. This result, in particular, holds in the case of a homogeneous fluid and improves the result obtained by [7]. Finally I observe that some results of [3] obtained for Prandtl or Schmidt numbers less than 1 (destabilizing effects and more than one critical Rayleigh numbers) are not present here because in the present paper they are essentially of steady type.

The plan of the paper is as follows. In sect. § 2, I recall the basic equations of the problem and the Lyapunov function introduced in [2] and give a nonlinear stability theorem. In sect. § 3, I study the variational problem related to the nonlinear stability parameter $\hat{R}_c^2$ for Prandtl and Schmidt numbers less than 1. Finally in sect. § 4 I obtain stability results for a homogeneous fluid with $P_r < 1$ and compare my results with those of linear stability and the nonlinear ones of [6,7] (in the case $P_r = 0.2$).

2. BASIC EQUATIONS AND LYAPUNOV FUNCTION

In the Oberbeck-Boussinesq scheme , the non-dimensional equations for a perturbation $(u, \vartheta, \gamma, p)$ to the basic

motionless state with linear temperature and concentration profiles, $m_0 = (\hat{v}=0, \hat{T}=-\alpha z + \hat{T}_0, \hat{C}=-\beta z + \hat{C}_0, \hat{p})$, in the case of a binary fluid mixture heated and salted above are (see [2, sect.2]):

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u = -\nabla p + (R\vartheta - C\gamma)k + \Delta u + Tu \times k \\ P_r \vartheta_t + P_r u \cdot \nabla \vartheta = R\omega + \Delta \vartheta \\ P_c \gamma_t + P_c u \cdot \nabla \gamma = -C\omega + \Delta \gamma \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

in the domain $\mathbb{R}^2 \times [0,1] \times (0,\infty)$, where R^2, C^2 and T^2 are the Rayleigh number (for the temperature), the Rayleigh number (for the concentration), and the Taylor number, respectively (see [2]).

With the system (2.1) we adopt the initial and boundary conditions:

$$u(x,0)=u_0(x), \quad \vartheta(x,0)=\vartheta_0(x), \quad \gamma(x,0)=\gamma_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^2 \times [0,1] \quad (2.2)$$

$$w(x,t)=\vartheta(x,t)=0, \gamma(x,t)=0, u_z(x,t)=v_z(x,t)=0, \text{ on } z=0, z=1, t \geq 0 \quad (2.3)$$

where $\vartheta_0(x), \gamma_0(x), u_0(x)$ are assigned (regular) fields with $\nabla \cdot u_0(x)=0$, and assume that the perturbation fields are periodic functions of x and y of periods $\frac{2\pi}{a_x}, \frac{2\pi}{a_y}$, respectively, and moreover we assume the average velocity conditions (cfr.[2]). Following [2] we choose here the Lyapunov function

$$V(t) = V_0(t) + bV_1(t) \quad (2.4)$$

where

$$\begin{cases} V_0(t) = \frac{1}{2} [\|\nabla w\|^2 + a_1 \|\vartheta_z\|^2 + a_2 \|\gamma_z\|^2 + a_3 \|f_1\|^2 + a_4 \|f_2\|^2] \\ V_1(t) = \frac{1}{2} [\|\nabla u\|^2 + P_r \|\nabla \vartheta\|^2 + P_c \|\nabla \gamma\|^2] \end{cases}, \quad (2.5)$$

with $\|\cdot\| = L_2(\Omega_1)$ -norm, Ω_1 being the periodicity cell:

$$\Omega_1 = [0, 2\pi/a_x] \times [0, 2\pi/a_y] \times [0, 1].$$

In (2.5) we have used the essential variables of the linear stability problem : $w, \zeta, \vartheta, \gamma$ and the balances of different physical causes which inhibit or promote instabilities:

$$f_1 = \zeta - c_1 \vartheta_z, \quad f_2 = \zeta + c_2 \gamma_z. \quad (2.6)$$

The positive constants $b, a_1, \dots, a_4, c_1, c_2$ in (2.4)-(2.6) shall be chosen later in such a way to obtain results as close as possible to the linear ones.

The evolution equation of the Lyapunov function $V(t)$ is (see [2]):

$$\dot{V} = I_0 - D_0 + N_0 + bI_1 - bD_1 + bN_1 + B, \quad (2.7)$$

with

$$\begin{aligned} I_0 = & -R(\Delta_1 \vartheta, w) + C(\Delta_1 \gamma, w) + [a_3 (T - \frac{c_1 R}{P_r}) + a_4 (T - \frac{c_2 C}{P_c}) - T](\zeta, w_z) + \\ & + [\frac{a_1 R}{P_r} - a_3 c_1 (T - \frac{c_1 R}{P_r})](w_z, \vartheta_z) + [\frac{-a_2 C}{P_c} + a_4 c_2 (T - \frac{c_2 C}{P_c})](w_z, \gamma_z) + \\ & - a_3 c_1 (1 - \frac{1}{P_r})(\nabla \vartheta_z, \nabla f_1) + a_4 c_2 (1 - \frac{1}{P_c})(\nabla \gamma_z, \nabla f_2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

with $(\cdot, \cdot)$ the inner product in $L_2(\Omega_1)$,

$$D_0 = \|\Delta w\|^2 + \frac{a_1}{P_r} \|\nabla \vartheta_z\|^2 + \frac{a_2}{P_c} \|\nabla \gamma_z\|^2 + a_3 \|\nabla f_1\|^2 + a_4 \|\nabla f_2\|^2, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} N_0 = & -(\nabla \times (\nabla \times (u \cdot \nabla u)) \cdot k, w) - a_1 (u_z \cdot \nabla \vartheta, \vartheta_z) - a_3 (\nabla \times (u \cdot \nabla u) \cdot k, f_1) + \\ & + a_3 c_1 (u_z \cdot \nabla \vartheta, f_1) + a_3 c_1 (u \cdot \nabla \vartheta_z, f_1) - a_2 (u_z \cdot \nabla \gamma, \gamma_z) \\ & - a_4 (\nabla \times (u \cdot \nabla u) \cdot k, f_2) - a_4 c_2 (u_z \cdot \nabla \gamma, f_2) - a_4 c_2 (u \cdot \nabla \gamma_z, f_2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$I_1 = 2R(\nabla w, \nabla \vartheta) - 2C(\nabla w, \nabla \gamma) \quad , \quad (2.11)$$

$$D_1 = \|\Delta \vartheta\|^2 + \|\Delta \gamma\|^2 + \|\Delta u\|^2 \quad , \quad (2.12)$$

$$N_1 = (u \cdot \nabla u, \Delta u) + P_r (u \cdot \nabla \vartheta, \Delta \vartheta) + P_c (u \cdot \nabla \gamma, \Delta \gamma) \quad , \quad (2.13)$$

and B is the sum of the boundary integrals. Because of the periodicity and the boundary conditions, it is easy to see that $B=0$.

Now, following [2], we choose

$$c_1 = \frac{P_r T \xi_1}{R} \quad , \quad c_2 = \frac{P_c T \xi_2}{C} \quad , \quad \xi_1, \xi_2 \in (0,1), \quad (2.14)$$

$$a_3 = \frac{\varepsilon}{1-\xi_1} \quad , \quad a_4 = \frac{1-\varepsilon}{1-\xi_2} \quad , \quad \varepsilon \in (0,1) \quad (2.15)$$

and define

$$\sigma_1 = \frac{a_1}{P_r} - \frac{\varepsilon P_r T^2 \xi_1}{R^2} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{a_2}{P_c} - \frac{(1-\varepsilon) P_c T^2 \xi_2}{C^2} \quad . \quad (2.16)$$

Then applying the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$I_o - D_o \leq I'_o - D'_o \quad (2.17)$$

where

$$I'_o = - (R(\Delta_1 \vartheta, w) + C(\Delta_1 \gamma, w) + R\sigma_1 (w_z, \vartheta_z) - C\sigma_2 (w_z, \gamma_z)) \quad , \quad (2.18)$$

$$D'_o = \|\Delta w\|^2 + \alpha_1 \|\nabla \vartheta_z\|^2 + \alpha_2 \|\nabla \gamma_z\|^2 \quad , \quad (2.19)$$

with

$$\alpha_1 = \sigma_1 + \varepsilon \delta_1 P_r \xi_1 \frac{T^2}{R^2}, \alpha_2 = \sigma_2 + (1-\varepsilon) \delta_2 P_c \xi_2 \frac{T^2}{C^2}, \quad (2.20)$$

$$\delta_i = 1 - \frac{\xi_i (P_r - 1)^2}{4P_r (1-\xi_i)} \quad , \quad \delta_i \in (0,1), \quad (i=1,2). \quad (2.21)$$

(We observe that σ_1, σ_2 will be chosen in such a way that $\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2$ are positive)

In order to obtain the apriori estimate for $\dot{V}$, we define:

$$M = \sup_{H_1} \frac{I_0}{D}, \quad (2.22)$$

where H_1 is the space of admissible functions:

$$H_1 = \{w, \vartheta, \gamma \in C^6 \text{ which are periodic in } x \text{ and } y \text{ and} \\ \text{satisfy (2.3)}_{1-3}, w_t = \zeta_z = w_{zz} = \Delta w = \vartheta_{zz} = \gamma_{zz} = f_{1z} = f_{2z} = 0 \\ \text{on } z=0, z=1\}. \quad (2.23)$$

The existence of the maximum (2.22) can be proved with the method given in [8].

Proceeding as in [2] we have

THEOREM 1. *Let*

$$0 < M < 1, \quad (2.24)$$

$$V(0) < A_1 \quad (2.25)$$

where A_1 is a computable constant. Then there exists a positive constant α_0 such that

$$V(t) \leq V(0) \exp\{-\pi^2 \alpha_0 (1-M)[1-A_1^2 V(0)^{1/2}]t\}. \quad (2.26)$$

3. VARIATIONAL PROBLEM AND STABILITY RESULTS FOR P_r OR $P_c < 1$

Here we solve the variational problem (2.22) and find the nonlinear stability parameter $\hat{R}_c^2$.

The Euler-Lagrange equations of the problem (2.22) are found to be:

$$\begin{cases} -R\Delta_1 \vartheta + C\Delta_1 \gamma - R\sigma_1 \vartheta_{zz} + C\sigma_2 \gamma_{zz} - 2\rho \Delta \Delta w = 0 \\ -R\Delta_1 w - R\sigma_1 w_{zz} - 2\rho \alpha_1 \Delta \vartheta_{zz} = 0 \\ C\Delta_1 w + C\sigma_2 w_{zz} - 2\rho \alpha_2 \Delta \gamma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

where ρ is the generic eigenvalue related to the maximum

problem (2.22).

For this system we easily obtain:

$$\frac{R^2 [\Delta_1^2 w + 2\sigma_1 \Delta_1 w_{zz} + \sigma_1^2 w_{zzzz}]}{2\rho\alpha_1} + \frac{C^2 [\Delta_2^2 w + 2\sigma_2 \Delta_2 w_{zz} + \sigma_2^2 w_{zzzz}]}{2\rho\alpha_2} - 2\rho\Delta^3 w_{zz} = 0. \quad (3.2)$$

Because of the linearity and the boundary conditions we may seek solutions of this kind (see [5]):

$$w = A_1 \sin \pi z \exp[i(a_1 x + a_2 y)], \quad n=1, 2, 3, \dots, a_1 > 0, a_2 > 0. \quad (3.3)$$

Substituting (3.3) in (3.2), we have:

$$4\rho^2 = \frac{R^2 (a^2 + \sigma_1 n^2 \pi^2)^2}{n^2 \pi^2 \alpha_1 (n^2 \pi^2 + a^2)^3} + \frac{C^2 (a^2 + \sigma_2 n^2 \pi^2)^2}{n^2 \pi^2 \alpha_2 (n^2 \pi^2 + a^2)^3}, \quad (3.4)$$

where $a^2 = a_1^2 + a_2^2$.

We shall obtain the best stability condition $M < 1$ if, for fixed σ_1 and σ_2 , we maximize α_1 and α_2 with respect ξ_1 and ξ_2 in $(0, 1)$.

It is easy to verify that

$$\max_{(0,1)} P_r \delta_1 \xi_1 = p_o^2, \quad \max_{(0,1)} P_c \delta_2 \xi_2 = p_1^2, \quad (3.5)$$

with

$$p_o^2 = \begin{cases} 1 & \text{when } P_r \geq 1 \\ P_r^2 & \text{when } 0 < P_r < 1, \end{cases} \quad p_1^2 = \begin{cases} 1 & \text{when } P_c \geq 1 \\ P_c^2 & \text{when } 0 < P_c < 1 \end{cases}. \quad (3.6)$$

Choosing:

$$\varepsilon = \frac{p_1^2 R^2}{p_o^2 C^2 + p_1^2 R^2}, \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad (3.7)$$

from (3.4) we find:

$$\rho^2 = \frac{\hat{R}^2 (a^2 + \sigma_1 n^2 \pi^2)^2}{4(\sigma_1 + \frac{P_o^2 P_1^2 T^2}{P_o^2 C^2 + P_1^2 R^2}) n^2 \pi^2 (n^2 p^2 + a^2)^3}, \quad (3.8)$$

where $\hat{R}^2$ is defined by

$$\hat{R}^2 = R^2 + C^2. \quad (3.9)$$

Therefore, we have

$$M^2 = \max \rho^2 \quad (3.10)$$

as n and a^2 assume the values $n=1,2,3,\dots$, $a^2 > 0$.

Assuming

$$P_r < 1, \quad P_r < P_o \quad (3.11)$$

and taking the definitions (3.6) into account, we obtain

$$\frac{P_r^2 C^2 + P_1^2 R^2}{P_r^2 P_1^2 T^2} < \frac{\hat{R}^2}{P_r^2 T^2}. \quad (3.12)$$

Then, by virtue of (3.8), we have:

$$\rho^2 < \rho_1^2 = \frac{\hat{R}^2 (a^2 + \sigma_1 n^2 \pi^2)^2}{4(\sigma_1 + \frac{P_r^2 T^2}{\hat{R}^2}) n^2 \pi^2 (n^2 p^2 + a^2)^3}. \quad (3.13)$$

The stability condition (2.24) $M < 1$, is satisfied if

$$\hat{R}^2 < \hat{R}_\varepsilon^2 \quad (3.14)$$

where

$$\hat{R}_\varepsilon^2 = \max_{\sigma_1 \leq 1/2} \min_n \min_a \hat{R}_1^2, \quad n=1,2,3,\dots, \quad a^2 \in (0, \infty) \quad (3.15)$$

and

$$\hat{R}_1^2 = \frac{2\sigma_1 n^2 \pi^2 (n^2 \pi^2 + a^2)^3}{(a^2 + \sigma_1 n^2 \pi^2)^2} + \left[\frac{4\sigma_1^2 n^4 \pi^4 (n^2 \pi^2 + a^2)^6}{(a^2 + \sigma_1 n^2 \pi^2)^4} + \frac{4T^2 P_r^2 (n^2 \pi^2 + a^2)^3}{(a^2 + \sigma_1 n^2 \pi^2)^2} \right]^{1/2}. \quad (3.16)$$

From the results obtained in [1], we have

$$\hat{R}_c^2 = \begin{cases} 27\pi^4 (1-\sigma_1^*)^2 & \text{for } 0 \leq T^2 P_r^2 \leq 80\pi^4 \\ 6\pi^4 \left[\left(1 + \frac{P_r^2 T^2}{\pi^4}\right)^{1/2} - 1 \right] & \text{for } T^2 P_r^2 > 80\pi^4 \end{cases}, \quad (3.17)$$

with σ_1^* given by the solution of the cubic equation

$$(1-\sigma_1)^2 (1-2\sigma_1) = \frac{P_r^2 T^2}{27\pi^4}. \quad (3.18)$$

in the interval $[-1/3, 1/2]$.

Of course, $\hat{R}_c^2$ is the critical stability parameter of the non-linear stability.

4. THE CASE OF A HOMOGENEOUS FLUID

Here we consider the case of a homogeneous fluid with Prandtl number less than 1 (a physical example may be the mercury for which $P_r=0.025$). From (3.12) - (3.18) we see that a sufficient condition for nonlinear stability of the basic motion m_0 , which holds for any P_r and P_c satisfying (3.11), is given by the condition we get for a homogeneous fluid in the case $P_r < 1$.

In this case, Veronis, [6] , finds subcritical instabilities are possible for T^2 between 10^2 and 10^4 . Here I give the critical Rayleigh numbers, for different Taylor numbers, and prove the stabilizing effect of rotation. My results are compared with those of linear stability in the cases of the onset of convection as stationary convection and the onset of convection as overstability. I also compare my results with the non-linear results of Veronis [6] and Galdi &

Straughan [7] for $P_r = 0.2$.

Introducing the Veronis number

$$S^2 = T^2 P_r^2. \quad (4.1)$$

Then from (3.17), (3.18), we have:

$$\hat{R}_c^2 = \begin{cases} 27\pi^4 (1-\sigma_1^*)^2 & \text{for } 0 \leq S^2 \leq 80\pi^4 \\ 6\pi^4 \left[\left(1 + \frac{S^2}{\pi^4}\right)^{1/2} - 1 \right] & \text{for } S^2 > 80\pi^4, \end{cases} \quad (4.2)$$

where σ_1^* is the solution of the equation

$$(1-\sigma_1)^2 (1-2\sigma_1) = \frac{S^2}{27\pi^4}. \quad (4.3)$$

From (4.2) and (4.3) we obtain the stabilizing effect of rotation on the onset of convection. This is obvious when $S^2 > 80\pi^4$. In the case $0 \leq S^2 \leq 80\pi^4$, we observe that the correspondence between S^2 and $\sigma_1^* \in [-1/3, 1/2]$ given by (4.3) is bijective. Since

$$\frac{dS^2}{d\tau^*} = -54\pi^4 (1-\sigma_1^*) (2-3\sigma_1^*) < 0, \quad (4.4)$$

then S^2 is a strictly decreasing function of σ_1^* and consequently from (4.2), we see that R_c^2 is a strictly increasing function of S^2 .

In order to compare (4.2) with the results of linear stability, we consider separately the case of the onset of convection as stationary convection and the case of the onset of convection as overstability.

a) The onset of convection as stationary convection.

In this case the results of the linear stability are the same as in the case $P_r \geq 1$ and are given by

$$\hat{R}_L^2 = \frac{\pi^4}{x} \left[(1+x)^3 + \frac{T^2}{\pi^4} \right], \quad (4.5)$$

where x is given by the solution of the cubic equation

$$2x^3 + 3x^2 = 1 + \frac{T^2}{\pi^4}, \quad x \geq 1/2, \quad (4.6)$$

and it is related to the linear wave number a_L^2 by the formula

$$a_L^2 = \pi^2 x. \quad (4.7)$$

(Here the Taylor number is denoted by T^2 while in [5] it is denoted by T . This is due to the different non-dimensional forms of the equations).

(4.5) and (4.6) imply:

$$\hat{R}_L^2 = 3\pi^4 (1+x)^2. \quad (4.8)$$

Now, putting

$$a_c^2 = \pi^2 y, \quad (4.9)$$

from (4.2) and (4.3), we obtain:

$$\hat{R}_\varepsilon^2 = \begin{cases} 3\pi^4 (1+y)^2 & \text{for } 0 \leq S^2 \leq 80\pi^4 \\ 6\pi^4 \left[\left(1 + \frac{S^2}{\pi^4}\right)^{1/2} - 1 \right] & \text{for } S^2 > 80\pi^4, \end{cases} \quad (4.10)$$

with y given by the equation

$$2y^3 + 3y^2 = 1 + \frac{S^2}{\pi^4}, \quad 1/2 \leq y \leq 3. \quad (4.11)$$

Because of (4.1), if we compare (4.6) and (4.11), we obtain

$$0 \leq x-y = \frac{T^2(1-P_r^2)}{2\pi^4(x^2 + xy + y^2) + 3\pi^4(x+y)} \leq \frac{2}{9\pi^4} T^2(1-P_r^2). \quad (4.12)$$

From this, we see that

$$\hat{R}_\varepsilon^2 \rightarrow \hat{R}_L^2 \quad (4.13)$$

in the following cases:

- 1) $P_r \rightarrow 1, \quad 0 \leq T^2 \leq 80\pi^4$
- 2) $T^2 \rightarrow 0, \quad P_r \in (0, 1).$

b) The onset of convection as overstability.

In this case the results of the linear stability [see 5,p.116], are:

$$R_L^2 \equiv R_o^2 = \frac{2\pi^4(1+P_r)}{x_o} [(1+x_o)^3 + \frac{\mu_o^2 T^2}{\pi^4}] , \quad (4.14)$$

with

$$\mu_o^2 = \frac{P_r^2}{(1+P_r)^2} , \quad (4.15)$$

and x_o given by the solution of the equation

$$\frac{\mu_o^2 T^2}{\pi^4} = 2x_o^3 + 3x_o^2 - 1 , \quad x_o \geq 1/2 . \quad (4.16)$$

Our results are the same as in the case a) and are given by (4.10)-(4.11). Proceeding as above, we have

$$0 \leq y - x_o \leq \frac{2}{9\pi^4} T^2 P_r^2 [1 - \frac{1}{(1+P_r)^2}] . \quad (4.17)$$

Then, we find that

$$\hat{R}_c^2 \rightarrow \frac{1}{2(1+P_r)} R_o^2 \quad (4.18)$$

in the following cases:

- 3) $P_r \rightarrow 0$, $0 \leq T^2 P_r^2 \leq 80\pi^4$
- 4) $T^2 \rightarrow 0$, $P_r \in (0, 0.67659)$.

In the following tables I and II, I compare my results with those of other authors in the case of a homogeneous fluid. Obviously the same results hold for a mixture in the hypotheses (3.11). In table I my results are compared with those of [5] for the onset of oscillatory convection (overstability) in the case of mercury ($P_r = 0.025$). In table II, my results are compared with those of [5], [6] and [7] for $P_r = 0.2$.

TABLE I Critical Rayleigh numbers for oscillatory convection and non-linear analysis against

Taylor numbers in the case of mercury ($P_r = 0.025$).

T^2	R_o^2 ^a	$\hat{R}_\epsilon^2$ ^b
0	1348	657.511
10	1348	657.511
10^2	1348	657.6
10^3	1350	658.7
1.681×10^4	1388	678
1.681×10^5	1694	833.7
1.681×10^6	3436	1712
8.405×10^6	7523	3768
1.681×10^7	11020	5513

^a For oscillatory convection (Chandrasekhar [5])

^b For the non-linear stability.

TABLE II Critical Rayleigh numbers against Taylor numbers in the case $P_r = 0.2$.

T^2	R_o^2 ^a	R_o^2 ^b	R_v^2 ^c	R_{G-S}^2 ^d	$\hat{R}_\epsilon^2$ ^e
100	826.3	1591	749.7	-	665.44
250	1019.5	1611	-	658.16	677.1
316	1093	1619	837	-	682.12
1000	1676	1704	1005	-	731.4
2500	2564	1872	-	725	826.3
3162	2887	1940	1342	-	864.1
10000	5377	2522	2059	-	1179.2
12500	6106	2702	-	1182	1275
25000	9154	3463	-	1623	1676
31623	10533	3809	3714	-	1857.7
50000	13898	4651	-	2293	2299
100000	21306	6488	7854	-	3260.4
125000	24494	7270	-	3626	3670
2.5×10^6	167241	40801	-	16217	18151

^a For stationary convection (Chandrasekhar [5])

^b For oscillatory convection (Chandrasekhar [5])

^c For Veronis,[6]

d For Galdi and Straughan,[7]

e Our non-linear results.

REMARK. We observe that in the cases $P_c < 1$, $P_c < P_r$ and $P_r < 1, P_c \leq P_r$ we obtain results as in the case (3.11) provided we substitute P_r with P_c . In the case $P_c < 1, P_r \leq P_c$ we obtain the same results as in the case (3.11).

This research has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of the C.N.R. and has been partially supported by the Italian Ministry for Education (M.P.I.) under 40% and 60% contracts and by C.N.R.-S.P.A.I.M.

REFERENCES

1. G. Mulone and S. Rionero, On the non-linear stability of the rotating Bénard problem via the Lyapunov direct method *J. Mat. Anal. App.* (to appear).
2. S. Rionero and G. Mulone, On the stability of a mixture in a rotating layer via the Lyapunov second method, (to appear).
3. A. J. Pearlstein, Effect of rotation on the stability of a doubly diffusive fluid layer, *J. Fluid Mech.* 103, 389 (1981).
4. S. Sengupta and A. S. Gupta, Thermohaline convection with finite amplitude in a rotating fluid, *Z. Angew. Math. Phys.*, 22, 906 (1971).
5. S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and hydromagnetic stability", Oxford University Press 1961.
6. G. Veronis, Large amplitude Bénard convection in a

- rotating fluid, *J. Fluid Mech.* **31** (1968), 113-139.
7. G.P. Galdi and B. Straughan, A nonlinear analysis of the stabilizing effect, of rotation in the Bénard problem, *Proc. R. Soc. Lond. A* **402** (1985), 257-283.
8. S. Rionero and G. Mulone, On a maximum problem governing the non linear stability of rotating Bénard problem, *Ricerche Mat.* (to appear).

Dipartimento di Matematica,
Viale A. Doria, 6 95125 Catania, Italy

SOME CONTINUOUS DEPENDENCE THEOREMS IN MHD WITH
HALL AND ION-SLIP CURRENTS IN UNBOUNDED DOMAINS

Nota di G.Mulone and F.Salemi

Presentata dal Socio Salvatore Rionero

Adunanza del 4/06/88

Riassunto Si dimostrano alcuni teoremi di dipendenza continua ed unicità per una soluzione delle equazioni della magnetoidrodinamica con effetti Hall e di ion-slip nei domini esterni.

Abstract We show some continuous dependence and uniqueness theorems for a solution of magnetohydrodynamics equations with Hall and ion-slip currents in unbounded domains.

1. INTRODUCTION

In [1], by using the weight-function method introduced in [2-7], we proved some uniqueness and continuous dependence theorems for a solution of magnetohydrodynamics (MHD) with Hall currents in unbounded domains.

Here - taking the results of [1] into account - we show some continuous dependence and uniqueness theorems for a solution of MHD with Hall and ion-slip currents. As is well known (see, for instance, [8-10]), the last currents cannot

be neglected for a weakly ionized gas when a strong magnetic field acts.

In sect. 2 we introduce the basic equations and deduce the energy equation. In sect. 3, we prove that the hypotheses given in [1] for the kinetic, magnetic and pressure fields (of the basic motion and the perturbation) and for the data, are *sufficient* to show analogous continuous dependence and uniqueness theorems also in presence of ion-slip currents.

2. BASIC EQUATIONS AND ENERGY IDENTITY

Let $\mathcal{E}$ be an electrically conducting incompressible fluid submitted to external forces depending on position and time which moves in region $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Let us assume that Ω is unbounded in all directions, exterior to a bounded domain Ω_0 , with boundary $\partial\Omega$ sufficiently smooth.

In the non-relativistic scheme, neglecting the displacement currents, the MHD equations with the Hall and ion-slip effects are, (see [8]):

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + v \cdot \nabla H = H \cdot \nabla v + \eta \Delta_2 H + \beta_H \nabla \times [H \times (\nabla \times H)] + \beta_I \nabla \times [H \times \nabla \times H] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\frac{\mu}{\rho} H \cdot \nabla H - \frac{1}{\rho} \nabla (p + \frac{\mu}{2} H^2) + \nu \Delta_2 v + F(P, t) \\ \nabla \cdot v = 0 \\ \nabla \cdot H = 0 \end{array} \right. \quad (P, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$$

In (2.1) H is the magnetic field, v is the kinetic field, ρ is the density, p the pressure, F is the external force.

The positive constants μ, ν, η are the magnetic permeability, kinematic viscosity and magnetic viscosity, respectively. Finally β_H and β_I are the Hall and ion-slip coefficients.

To equation (2.1) we append the following initial and

$$\text{boundary data: } \begin{cases} v(P,0)=v_0(P) \\ H(P,0)=H_0(P) \end{cases} \quad \text{on } \Omega ,$$

$$\begin{cases} v(P,t)=v_\Sigma(P,t) \\ H(P,t)=H_\Sigma(P,t) \end{cases} \quad \text{on } \partial\Omega \times [0,T] ,$$

where $v_0, H_0, v_\Sigma, H_\Sigma$ are regular fields, $\nabla \cdot v_0 = 0$,

$$\nabla \cdot H_0 = 0, \quad \int_{\partial\Omega} v_\Sigma \cdot n d\sigma = \int_{\partial\Omega} H_\Sigma \cdot n d\sigma = 0 .$$

Let $\{v, H, p\}, \{v+u, H+h, p+\pi\}$ be two classical solutions of equation (2.1). Let us denote by $(v_0, H_0; v_0+u_0, H_0+h_0), (v_\Sigma, H_\Sigma; v_\Sigma+u_\Sigma, H_\Sigma+h_\Sigma), (F; F+f)$ the initial and boundary data, and external forces corresponding to the previous solutions. Then the perturbation $\{u, h, \pi\}$ satisfies the following equations

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + (v+u) \cdot \nabla h = h \cdot \nabla v + (H+h) \cdot \nabla u - u \cdot \nabla H + \eta \Delta_2 h + \\ + \beta_H \nabla \times \{ (H+h) \times (\nabla \times h) + h \times (\nabla \times H) \} + \beta_I \nabla \times \{ (H+h) \times [(H+h) \times \nabla \times h] \\ + (H+h) \times (h \times \nabla \times H) + h \times (H \cdot \nabla \times H) \} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (v+u) \cdot \nabla u = -u \cdot \nabla v + \frac{\mu}{\rho} [h \cdot \nabla H + (H+h) \cdot \nabla h] + \\ + \nu \Delta_2 u - \frac{1}{\rho} \nabla [\pi + \frac{\mu}{2} (h^2 + 2H \cdot h)] + f(P, t) \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot h = 0 \end{array} \right.$$

with the following initial and boundary conditions:

$$(2.3) \quad \begin{cases} u(P, 0) = u_0 \\ h(P, 0) = h_0 \end{cases} \quad P \in \Omega, \quad \begin{cases} u(P, t) = u_\Sigma \\ h(P, t) = h_\Sigma \end{cases} \quad (P, t) \in \partial\Omega \times [0, T].$$

Following [1, sect.2], we obtain the weighted energy equality:

$$(2.4) \quad \frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} h^2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial t} + (2u+v) \cdot \nabla g \right\} + \right. \\
+ \frac{1}{2} \gamma u^2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial t} + (u+v) \cdot \nabla g + \right. \\
+ gh \cdot \nabla v \cdot h - (u \cdot h) (2H+h) \cdot \nabla g - gH \cdot \nabla u \cdot h + g(\nabla \times h) \times u \cdot H - \\
- g\eta(\nabla \times h)^2 - \eta h \times (\nabla \times h) \cdot \nabla g + \beta_H \{ \nabla g \times h \cdot [(H+h) \times (\nabla \times h)] + \\
+ g(\nabla \times h) \cdot h \times (\nabla \times H) + \nabla g \times h \cdot h \times (\nabla \times H) \} + \\
+ \beta_I \{ -g[(H+h) \times (\nabla \times h)]^2 + \nabla g \times h \cdot \{ (H+h) \times [(H+h) \times (\nabla \times h)] + \\
+ (H+h) \times (h \times \nabla \times H) + h \times (H \times \nabla \times H) \} + g(\nabla \times h) \times (H+h) \cdot \\
\cdot (h \times \nabla \times H) + g(\nabla \times h) \cdot h \times (H \times \nabla \times H) \} + 2(H \cdot h) \nabla g \cdot u - \\
- \gamma g u \cdot \nabla v \cdot u - (H \cdot u) (h \cdot \nabla g) - gh \cdot \nabla u \cdot H - \nu \gamma g \nabla u \cdot \nabla u + \\
- \nu \gamma \nabla g \cdot \nabla u \cdot u + \frac{1}{\mu} \pi \nabla g \cdot u + \gamma g u \cdot f \Big] d\Omega + \\
+ \int_{\partial\Omega} \left[- \frac{1}{2} (v+u) h^2 g + g(u \cdot h) (H+h) + g(h \cdot u) H + \eta gh \times (\nabla \times h) - \right. \\
- \frac{\gamma}{2} (u+v) g u^2 + g(u \cdot H) h + \nu \gamma g \nabla u \cdot u - \frac{1}{\mu} g \pi u - \frac{1}{2} gh^2 u + \\
+ \beta_H \{ (H+h) \times (\nabla \times h) + h \times (\nabla \times H) \} \times gh \} - 2g(H \cdot h) u + \\
+ \beta_I \{ [(H+h) \times (H+h) \times (\nabla \times h)] \times gh + [(H+h) \times (h \times \nabla \times H) +$$

$$+h(H \times \nabla \times H)] \times gh \} \Big] \cdot nd\sigma ,$$

where $g=g(P,t)$ is a suitably differentiable, positive scalar function which rapidly decreases at large distance from the boundary (weight function), and E is the weighted energy:

$$(2.5) \quad E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} g(r u^2 + h^2) d\Omega , \quad r = \frac{\rho}{\mu} .$$

We observe that the following identities

$$(2.6) \quad \beta_H \nabla \times \{ (H+h) \times (\nabla \times h) + h \times (\nabla \times H) \} \cdot gh = \beta_H \{ \nabla g \times h \cdot [(H+h) \times \nabla \times h +$$

$$+ g(\nabla \times h) \cdot h \times (\nabla \times H) + \nabla g \times h \cdot h \times (\nabla \times H) \} +$$

$$+ \nabla \cdot \{ \beta_H [(H+h) \times (\nabla \times h) + h \times (\nabla \times H)] \times gh \}$$

$$(2.7) \quad \beta_I \nabla \times \{ (H+h) \times [(H+h) \times (\nabla \times h)] + (H+h) \times (h \times \nabla \times H) \} + h \times (H \times \nabla \times H) \} \cdot gh =$$

$$= -\beta_I g [(H+h) \times (\nabla \times h)]^2 + \beta_I \nabla g \times h \cdot \{ (H+h) \times [(H+h) \times (\nabla \times h)] +$$

$$+ (H+h) \times [h \times (\nabla \times H)] + h \times H \times (\nabla \times H) \} +$$

$$+ \beta_I g [(\nabla \times h) \times (H+h) \cdot (h \times \nabla \times H)] + (\nabla \times h) \cdot h \times (H \times \nabla \times H) \} +$$

$$+ \nabla \cdot \{ \beta_I \{ (H+h) \times [(H+h) \times (\nabla \times h)] + (H+h) \times (h \times \nabla \times H) \} +$$

$$+ h \times (H \times \nabla \times H) \} \times gh \} ,$$

have been used to obtain (2.4).

3. CONTINUOUS DEPENDENCE AND UNIQUENESS THEOREMS

In this section we prove some continuous dependence and uniqueness theorems.

Theorem 3.1.

Let $\{u, h, \pi\}$ be a solution (2.2)-(2.3). If $|u_r| \leq M r^{1-\varepsilon_1}$, $|v_r| \leq M r^{1-\varepsilon_1}$, $|h| \leq M r^{1-\varepsilon_1}$, $|u| \leq M r^k$ ($M > 0$, $k > 0$, $\varepsilon_1 \in]0, 1[$), $r \geq \bar{r} > 0$), $|H| \leq M$, $|\nabla \times H| \leq M$, $|\nabla v + (\nabla v)^T| \leq M$, $\pi(P, t) = \pi_1(P, t) + \pi_2(P, t)$, where $\pi_2(r, t)$ is an arbitrary regular function of r and t , $\pi_1 \in L^{6-\varepsilon_2^2}(\Omega_T)$, $\varepsilon_2 \in]0, 4[$; $|\pi|$, $|\nabla u|$, $|\nabla h|$, $|\nabla \times H|$ are less than M on $\partial\Omega$, then $\{u, h, \pi\}$ satisfy the following continuous dependence:

$$(3.1) \quad |u_0|, |h_0|, |u_\Sigma|, |h_\Sigma|, |f| < \delta \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_R} (u^2 + h^2) d\Omega + \int_0^T dt \int_{\Omega_R} [(\nabla \times h)^2 + \nabla u : \nabla u] d\Omega < h_1(\delta)$$

$$\forall R : R_* \leq R \leq h_2(\delta), \quad \forall t \in [0, T], \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} h_1(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} h_2(\delta) = +\infty,$$

$R_* = \inf\{R : B(R) \supset \Omega_0\}$ and $B(R)$ is the ball of radius R centred in $\overset{\circ}{\Omega}_0$ and $\Omega_R = B(R) - \Omega_0$.

Proof. The proof is analogous to that of [1, sect.3]. We choose the weight function

$$(3.2) \quad g(P, t) = \begin{cases} e^{\frac{-R_0(t+t_0)^\beta}{R_0-r}} & r \in [0, R_0[, (R_0 > 0, \beta > 0) \\ 0 & r \geq R_0 \end{cases}$$

and proceed as in [1] for the terms which do not contain the

Hall and ion-slip effects. Here we refer only to some typical estimates of the terms which contain these effects:

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \nabla \mathbf{g} \times \mathbf{h} \cdot \{ \beta_{\mathbf{H}} (\mathbf{H} + \mathbf{h}) \times (\nabla \times \mathbf{h}) + \beta_{\mathbf{I}} \mathbf{H} \times [(\mathbf{H} + \mathbf{h}) \times (\nabla \times \mathbf{h})] \} \leq \\
 & \leq \frac{1}{2} (\beta_{\mathbf{H}} + \beta_{\mathbf{I}} M) g \{ [(\mathbf{H} + \mathbf{h}) \times (\nabla \times \mathbf{h})]^2 (T + t_0)^\beta \xi_2 + \\
 & + h^2 \left[\frac{(t + t_0)^\beta}{p} \frac{R_0}{R_0 - r} + \right. \\
 & \left. + (T + t_0)^\beta \frac{p-1}{p} \frac{R_0^{\frac{2p-1}{p-1}}}{(R_0 - r)^{\frac{4p-1}{p-1}} \xi_2^{\frac{p}{p-1}}} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \nabla \mathbf{g} \times \mathbf{h} \cdot \{ \beta_{\mathbf{H}} \mathbf{h} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \beta_{\mathbf{I}} \mathbf{H} \times [(\mathbf{h} \times (\nabla \times \mathbf{H}))] + \beta_{\mathbf{I}} \mathbf{h} \times [(\mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{h}))] \} \leq \\
 & \leq (\beta_{\mathbf{H}} M + 2\beta_{\mathbf{I}} M^2) g h^2 \left[\frac{1}{p} R_0 \frac{R_0}{R_0 - r} + \right. \\
 & \left. + (T + t_0)^\beta \frac{p-1}{p} R_0 \frac{(T + t_0)^\beta}{(R_0 - R)^{(2p-1)/(p-1)}} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & \beta_{\mathbf{I}} \nabla \mathbf{g} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} \times [(\mathbf{H} + \mathbf{h}) \times (\nabla \times \mathbf{h})] \leq \frac{1}{2} \beta_{\mathbf{I}} g \left\{ [(\mathbf{H} + \mathbf{h}) \times (\nabla \times \mathbf{h})]^2 (T + t_0)^\beta \xi_2 + \right. \\
 & + \frac{h^2}{p} \frac{R_0}{(R_0 - r)} (t + t_0)^\beta + \\
 & \left. + \frac{(p-1)}{p} (T + t_0)^\beta \frac{R_0^{(2p-1)/(p-1)} h^{(4p-2)/(p-1)}}{\xi_2^{p/(p-1)} (R_0 - r)^{(4p-1)/(p-1)}} \right\},
 \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad g(\nabla \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} \times \{ \beta_{\mathbf{H}} \nabla \times \mathbf{H} + \beta_{\mathbf{I}} \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} g(\beta_H M + 2\beta_I M^2) \left\{ \frac{h^2}{\xi} + \xi (\nabla \times h)^2 \right\},$$

$$(3.7) \quad \beta_I \nabla g \times h \cdot h \times [h \times (\nabla \times H)] \leq \beta_I g M h^2 \left[\frac{R_0}{R_0 - r} \frac{(t+t_0)^\beta}{p} + \right. \\ \left. + \frac{p-1}{p} (T+t_0)^\beta R_0 \frac{h^{p/(p-1)}}{(R_0 - r)^{(2p-1)/(p-1)}} \right],$$

$$(3.8) \quad \beta_I g [(\nabla \times h) \times (H+h)] \cdot h \times (\nabla \times H) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \beta_I g M \left\{ \frac{h^2}{\xi^2} + \xi_2 [(\nabla \times h) \times (H+h)]^2 \right\}.$$

Then we obtain the inequality:

$$(3.9) \quad \frac{dE}{dt} \leq \int_{\Omega_{R_0}} \left\{ \frac{1}{2} g h^2 \left[M \left(2 + \frac{\beta_H + \beta_I M}{\xi} + \frac{2M}{\xi_1} + \frac{\beta_I}{\xi_2} \right) \right] + \right. \\ + \frac{1}{2} g \gamma u^2 \left[\frac{M^2}{\gamma \xi} + 2M + 1 + \frac{1}{\mu \gamma} (T+t_0)^{2\beta} \right] + \\ + \frac{1}{2} g \nabla u : \nabla u \{ \xi_1 [2 + \nu \gamma (T+t_0)^\beta] - 2\nu \gamma \} + \\ + \frac{1}{2} g (\nabla \times h)^2 \{ \xi [1 + \beta_H M + \beta_I M^2 + \eta (T+t_0)^\beta] - 2\eta \} + \\ + \frac{1}{2} g [(\nabla \times h) \times (H+h)]^2 \{ \xi_2 [\beta_I M + (T+t_0)^\beta (\beta_H + \beta_I + \beta_I M)] - 2\beta_I \} + \\ + \frac{1}{2} g h^2 \frac{R_0}{R_0 - r} (t+t_0)^\beta \left\{ - \frac{\beta}{T+t_0} + \frac{1}{p} [2 + \eta + 3M + \right. \\ \left. + \beta_H (1+2M) + \beta_I (1+3M+4M^2)] \right\} + \gamma g u^2 \frac{R_0}{R_0 - r} (t+t_0)^\beta \left\{ - \frac{\beta}{T+t_0} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{p} \left[1 + \nu + \frac{1}{\gamma} + \frac{M}{\gamma} \right] \} d\Omega + \int_{\Omega_{R_0}} \frac{1}{2} \gamma g f^2 d\Omega + \\
& + \frac{1}{\mu} \int_{\Omega_{R_0}} \pi_2 \nabla g \cdot u d\Omega + \frac{1}{2\mu q} \frac{1}{R_0^{\eta q}} \int_{\Omega_{R_0}} g \pi_1^{2q} d\Omega + \\
& + \hat{F}(\partial\Omega, t) + F_1(R_0) \quad (\varepsilon, \xi_1, \xi_2, q > 0)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
(3.10) \quad \hat{F}(\partial\Omega, t) = & \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{2} |v+u|^2 + |u \cdot h| |2H+h| + \eta |h| |\nabla \times h| + \right. \\
& + \frac{1}{2} \gamma |u+v|^2 + |u \cdot H| |h| + \nu \gamma |\nabla u| |u| + \frac{1}{\mu} |\pi| |u| + \\
& + \frac{1}{2} h^2 |u| + 2 |H \cdot h| |u| + \beta_H \{ |H+h| |\nabla \times h| |h| + |\nabla \times H| h^2 \} + \\
& \left. + \beta_I \{ (H+h)^2 |\nabla \times h| |h| + |2H+h| |\nabla \times H| h^2 \} \right] d\sigma
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(3.11) \quad F_1(R_0) = & \int_{\Omega_{R_0}} \left[\frac{1}{2} g \frac{p-1}{p} (T+t_0)^\beta \frac{R_0}{(R_0-r)^{(2p-1)/(p-1)}} \cdot \right. \\
& \cdot \left\{ h^2 |2u_r + v_r|^{p/(p-1)} + \gamma u^2 |u_r + v_r|^{p/(p-1)} + \right. \\
& \left. + (h^2 + u^2) + (|2H_r + h_r|^{p/(p-1)} + 3M) + 2Mh^2 (\beta_H + 2\beta_I + \beta_I h^{p/(p-1)}) \right\} + \\
& + \frac{1}{2} g \frac{p-1}{p} \frac{(T+t_0)^\beta R_0^{(2p-1)/(p-1)}}{(R_0-r)^{(4p-1)/(p-1)}} \left\{ \eta h^2 \frac{1}{\xi_2^{p/(p-1)}} + \right. \\
& \left. + \frac{(\beta_H + \beta_I M) h^2}{\xi_1^{p/(p-1)}} + \frac{\beta_I h^{(4p-2)/(p-1)}}{\xi_2^{p/(p-1)}} + \nu \gamma \frac{u^2}{\xi_1^{p/(p-1)}} \right\} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\mu} g \frac{q-1}{q} \frac{R_0^{(2+\eta)(q/(q-1))}}{(R_0-r)^{4q/(q-1)}} d\Omega \quad (\eta > 0).$$

Following [1], we observe that

$$\int_{\Omega_{R_0}} \pi^2 \nabla g \cdot u d\Omega = 0,$$

(cfr. [4]).

Moreover, putting

$$p \in \left[1, 1 + \frac{\varepsilon_1}{5+2k-\varepsilon_1} \left[\quad ; q = 3 - \frac{\varepsilon_2}{2} ; \eta \in \right] 0, \frac{\varepsilon_2}{6-\varepsilon_2} \right],$$

from the hypotheses it follows that:

$$F_1(R_0) \leq A_1 R_0^{-1} l_1,$$

where A_1 and l_1 are suitable positive constants which do not depend on R_0 .

Let us choose

$$\beta \geq \max \left\{ \frac{T+t_0}{p} [2+\eta+3M+\beta_H(1+2M)+\beta_I(1+3M+4M^2)] , \right.$$

$$\left. \frac{T+t_0}{p} \left[1+\nu + \frac{1}{\gamma} + \frac{M}{\gamma} \right] \right\},$$

$$\xi = \frac{2\eta-2\lambda}{1+\beta_H M + \beta_I M^2 + \eta(T+t_0)} \beta,$$

$$\xi_1 = \frac{2\nu\gamma-2\lambda}{2+\nu\gamma(T+t_0)} \beta,$$

$$\xi_2 = \frac{2\beta_I-2\lambda}{\beta_I M + (T+t_0) (\beta_H + \beta_I + \beta_I M)} \beta,$$

with $0 < \lambda < \min(\eta, \nu\gamma, \beta_I)$,

$$k_1 = \max \left\{ M \left[2 + \frac{\beta_H + \beta_I M}{\xi} + \frac{2M}{\xi_1} + \frac{\beta_I}{\xi_2} \right], \right. \\ \left. \frac{M^2}{\gamma \xi} + 2M + 1 + \frac{1}{\mu \gamma} (T + t_0)^{2\beta} \right\},$$

then from the previous calculations it follows:

$$\frac{dE}{dt} \leq k_1 E - \lambda \int_{\Omega_{R_0}} g \{ \nabla u : \nabla u + (\nabla \times h)^2 + [(\nabla \times h) \times (H + h)]^2 \} d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \gamma \int_{\Omega_{R_0}} g f^2 d\Omega + \frac{1}{2\mu q} \frac{1}{R_0^{\eta q}} \int_{\Omega_{R_0}} g \pi_1^{2q} d\Omega + \hat{F}(\partial\Omega, t) + A_1 R_0^{-1/1}.$$

Following [1] we finally obtain:

$$\int_{\Omega_{\bar{R}}} (u^2 + h^2) d\Omega + \int_0^T dt \int_{\Omega_{\bar{R}}} \{ \nabla u : \nabla u + (\nabla \times h)^2 + [(\nabla \times h) \times (H + h)]^2 \} d\Omega \leq \\ \leq A_2 (\delta^2 \bar{R}^{-3} + \delta + \bar{R}^{-\sigma} + \delta^2 \bar{R}^{-1})$$

where A_2 is a suitable positive constant, $\bar{R} = \frac{1}{2} R_0$, $\sigma = \min(1/1, \eta q)$.

Choosing

$$\bar{R} = \delta^{-z} \text{ with } z \in \left] 0, \frac{2}{3} \right[, \text{ the theorem follows with}$$

$$h_1(\delta) = A_3 (\delta^{2-3z} + \delta + \delta^{2+z} + \delta^{\sigma z}),$$

$$h_2(\delta) = \delta^{-z}.$$

As consequence of theorem 3.1 we have the following corollary:

Theorem 3.2.

In the hypotheses of theorem 3.1, if $u_0 = h_0 = u_\Sigma = h_\Sigma = f = 0$ the basic motion is unique. ■

Now we observe that the remarks 1, 2, 4, 7, 8 and 9 of theorem 1 in [1, sect. 3] are valid also in our case.

By using the weight function $g = e^{-m(t+t_0)^s} r^\alpha$ defined on Ω_T with $m > 0$, $t_0 \geq 1$, $s \geq 0$, $\alpha > 0$ and Ω_0 containing - at the first stage - the unit ball, we can prove:

Theorem 3.3.

Let $\{u, h, \pi\}$ be a solution (2.2)-(2.3). If $|u_r| \leq Mr$, $|u| \leq Mr^k$, $|h| \leq Mr^{1-\varepsilon}$, $|v_r| \leq Mr$, $|v| \leq Mr^k$, $|\nabla v + (\nabla v)^T| \leq M$, $|H| \leq M$, where $M > 0$, $k > 0$, $0 < \varepsilon \leq 1$; $|\nabla u| \leq Mr^k$, $|\nabla \times h| \leq Mr^k$, $|\nabla \times H| \leq M$, $\pi(P, t) = \pi_1(P, t) + \pi_2(r, t)$, with $|\pi_i| \leq Mr^k$ ($i=1, 2$) and

$$\frac{\pi_1 r^{\tilde{\gamma}}}{(\lg r)^\delta} \in L^{6/(1-\tilde{\gamma})}(\Omega_T), \quad \tilde{\gamma} \in]-\gamma^*, \frac{1}{2}[, \quad \delta \in \left[0, \frac{2-\tilde{\gamma}}{3} \right[$$

with $0 < \gamma^* < 1$; then (3.1) holds.

The proof is analogous to theorem 2 in [1, sect 4], with the following restrictions on the parameters:

$$m \geq \frac{3}{1+\gamma^*} + 2; \quad s = \bar{s} = (T+t_0) \max \left\{ \frac{2M}{m} + \frac{2M}{m\xi_0} + \frac{\beta_H M}{m\xi_0} + \right. \\ \left. + \frac{2\beta_I M}{m\xi_0} + s_0, \frac{M}{m\gamma\xi_0} + \frac{2M}{m} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{m} + s_0 \right\}$$

$$\text{with } s_0 > 0, \quad \xi_0 = \min \left[\frac{2\nu r}{2M + \nu r m}, \frac{2\eta}{M(1+\beta_H + \beta_I) + \eta m} \right],$$

$$\frac{2\beta_I}{\beta_H m + M(\beta_I + 2m\beta_I)} \Big],$$

$0 < \alpha \leq \alpha^* = \min(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2)$ where

$$\alpha_1 = \frac{s_0}{(7 + 2\beta_H + 4M\beta_I + 2\beta_I)M + \left[\frac{2\eta}{\xi_0} + \frac{2\beta_H}{\xi_0} + \frac{4\beta_I M}{\xi_0} \right] (T + t_0)^{2s}}$$

$$\alpha_2 = \frac{s_0}{2M \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) + \frac{2\nu}{\xi_0} (T + t_0)^{2s}}.$$

REFERENCES

- [1] MULONE G., SALEMI F., On the continuous dependence of the MHD equations with Hall current in unbounded domains, *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, ser. IV*, 48 (1981), 253-273.
- [2] GALDI G.P., RIONERO S., A uniqueness theorem for hydromagnetic flows in unbounded domains, *Ann. Mat. Pura App.* IV, 108 (1976) 361-366.
- [3] RIONERO S., GALDI G.P., On the uniqueness of viscous fluid motion, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 62 (1976), 295-301.
- [4] RIONERO S., GALDI G.P., The weight function approach to uniqueness of viscous flows in unbounded domains, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 69 (1979), 37-52.
- [5] GALDI G.P., RIONERO S., On magnetohydrodynamic motions in unbounded domains: Stability and Uniqueness, *Ann. Mat. Pura App.*, 115 (1977), 119-154.

- [6] GALDI G.P., RIONERO S., Continuous dependence theorems for Navier-Stokes equations in unbounded domains by the weight-function method, *Quart. J. Mech. App. Math.*, 32 (1979), 149-161.
- [7] GALDI G.P., RIONERO S., A priori estimates, continuous dependence and stability for solutions to Navier-Stokes equations on exterior domains, *Riv. Mat. Univ. Parma*, 5 (1979).
- [8] MAIELLARO M., Uniqueness of M.F.D. thermodiffusive mixture flows with Hall and ion-slip effects, *Meccanica* 12 (1977) 9-14.
- [9] SUTTON G., SHERMAN A., *Engineering Magnetohydrodynamics*, Mc Graw-Hill, cap. V, New York, 1965.
- [10] MAIELLARO M., Sull'effetto stabilizzante della corrente M.H.D. ion-slip, *Atti del V Congresso Nazionale di Meccanica Teorica e Applicata*, Palermo 1980.

Dipartimento di Matematica, viale A.Doria 6, 95125 Catania

SU UNA CLASSE DI DISEQUAZIONI VARIAZIONALI
DI EVOLUZIONE DEL PRIMO ORDINE (*)

Nota di Angela Gallo e Anna Maria Piccirillo

Presentata dal Socio Ordinario Donato Greco

Adunanza del 5/11/1988

Riassunto. Si considera un problema unilaterale di Cauchy del primo ordine e si stabiliscono alcuni teoremi di esistenza.

Abstract. We consider unilateral first order Cauchy problem. We prove some existence theorems.

Consideriamo due aperti di $\mathbb{R}^n$, Ω_1 e Ω_2 , con $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, e denotiamo con V_ℓ ($\ell=1,2$) un sottospazio chiuso di $H^{m_\ell}(\Omega_\ell)$ ($m_\ell \in \mathbb{N}$), che supponiamo reale, contenente $H_0^{m_\ell}(\Omega_\ell)$.

Evidentemente

$$L^2(0,T;V_\ell) \subseteq L^2(0,T;L^2(\Omega_\ell)) \subseteq L^2(0,T;V'_\ell)$$

($0 < T < +\infty$, V'_ℓ = duale di V_ℓ) le immersioni essendo continue e dense.

Indichiamo con

$$(\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot)_\ell, ((\cdot, \cdot))_\ell \quad [\text{risp. } |\cdot|, |\cdot|_\ell, \|\cdot\|_\ell]$$

(*) Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

i prodotti scalari [risp. le norme] in $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega_\ell)$, V_ℓ e con

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\ell$$

la dualità tra V_ℓ e V'_ℓ .

Indichiamo poi con S_1 lo spazio di Banach riflessivo

$$\{v_1 \in L^2(0, T; V_1) : v'_1 \in L^2(0, T; V'_1)\}$$

munito della norma

$$\|v\|_{S_1} = \|v\|_{L^2(0, T; V_1)} + \|v'\|_{L^2(0, T; V'_1)}.$$

Ricordiamo che [4]

$$S_1 \subseteq C^0([0, T], L^2(\Omega_1))$$

con immersione continua.

Siano $A_\ell(t)$ ($t \in [0, T]$) operatori lineari continui di V_ℓ in V'_ℓ . Supponiamo che le forme bilineari su V_ℓ

$$a_\ell(t, y, z) = \langle A_\ell(t)y, z \rangle_\ell$$

soddisfino alle condizioni

$$(1) \quad \begin{aligned} a_\ell(\cdot, y, z) &\text{ è misurabile } \forall y, z \in V_\ell, \\ a_1(t, y, y) + \lambda |y|_1^2 &\geq c \|y\|_1^2 \quad \text{q.o. su }]0, T[\quad \forall y \in V_1 \quad (\lambda = \text{cost.} \geq 0), \\ a_2(t, y, y) &\geq c' \|y\|_2^2 \quad \text{q.o. su }]0, T[\quad \forall y \in V_2 \quad (c' = \text{cost.} > 0), \\ |a_\ell(t, y, z)| &\leq c'' \|y\|_\ell \|z\|_\ell \quad \text{q.o. su }]0, T[\quad \forall y, z \in V_\ell \quad (c'' = \text{cost.} > 0). \end{aligned}$$

Scelta $\psi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ in modo che il chiuso convesso

$$K = \{(v_1, v_2) \in \prod_{i=1}^2 L^2(0, T; V_\ell) : v_1(t) + \psi(t) \leq v_2(t) \text{ su } \Omega \text{ q.o. su }]0, T[\}$$

risulti non vuoto, consideriamo il

PROBLEMA (*). Assegnati $f_\ell \in L^2(0, T; V'_\ell)$ e $u_{10} \in L^2(\Omega_1)$, ricercare

$(u_1, u_2) \in [S_1 \times L^2(0, T; V_2) \cap K]$ tale che $u_1(0) = u_{10}$ ed inoltre

$$(2) \quad \int_0^T \langle u'_1(t), v_1(t) - u_1(t) \rangle_1 dt + \sum_{i=1}^2 \int_0^T \{ a_\ell(t, u_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t)) + \langle f_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) \rangle_\ell \} dt \geq 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in K.$$

Con procedimento analogo a quello seguito in [6] si

vede che la (2) è equivalente alla disequaglianza

$$\langle u'_1(t), v_1(t) - u_1(t) \rangle_1 + \sum_{i=1}^2 \{ a_\ell(t, u_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t)) + \langle f_\ell(t), v_\ell(t) - u_\ell(t) \rangle_\ell \} \geq 0 \quad \text{q.o. su }]0, T[\quad \forall (v_1, v_2) \in K.$$

Pertanto, posto $a_{1\lambda}(t, y, z) = a_1(t, y, z) + \lambda(y, z)_1$, il problema (*)

si può formulare in modo equivalente sostituendo la (2) con

la relazione

$$(3) \int_0^T \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} u_1(t)], e^{-\lambda t} (v_1(t) - u_1(t)) \right\rangle_1 + \right. \\ \left. + a_{\lambda}(t, u_1(t), v_1(t) - u_1(t)) e^{-2\lambda t} + a_2(t, u_2(t), v_2(t) - u_2(t)) e^{-2\lambda t} + \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^2 \langle f_i(t), v_i(t) - u_i(t) \rangle_i e^{-2\lambda t} \right\} dt \geq 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in K.$$

Utilizzando la (3) è facile verificare che il problema (*) ammette al più una soluzione.

In questa nota, che trae origine da un lavoro di R. Toscano [6], si stabiliscono alcuni teoremi di esistenza della soluzione per il problema (*). Il n.1 contiene delle considerazioni preliminari. Nel n.2 viene acquisita l'esistenza della soluzione con i teoremi 1 e 2. La dimostrazione del primo si basa su un noto risultato relativo alla soluzioni deboli di una disequazione variazionale di evoluzione [1], [2]; quella del secondo si ispira ai metodi di penalizzazione e di Faedo-Galerkin, largamente adoperati in [2], [3]. Nel n.3 si prova, utilizzando ancora la tecnica della penalizzazione, l'esistenza della soluzione in un caso particolare ma in ipotesi meno restrittive sui dati.

1.-

In questo paragrafo dimostriamo alcune proposizioni, che saranno utilizzate successivamente per stabilire i teoremi di esistenza della soluzione per il problema (*).

Premettiamo una proprietà dello spazio S_1 .

(1.1). Se $\{v_n\}$ è una successione di elementi di S_1 ivi debolmente convergente a v , si ha:

$$\forall t \in [0, T] \quad v_n(t) \rightarrow v(t) \quad \text{debolmente in } L^2(\Omega_1).$$

Dim. Sia $t_0 \in [0, T]$. Da un lato

$$(4) \quad \{v_n(t_0)\} \quad \text{è limitata in } L^2(\Omega_1)$$

poichè $S_1 \subseteq C^0([0, T], L^2(\Omega_1))$ con immersione continua. D'altra parte

$$(5) \quad \lim (v_n(t_0), z)_1 = (v(t_0), z)_1 \quad \forall z \in V_1.$$

Infatti, se $t_0 < T$, scelta $\phi \in C^1([0, T])$ con $\phi(t_0) = 1$ e $\phi(T) = 0$, risulta:

2.-

Relativamente al problema (*) dimostriamo due teoremi di esistenza. Per quanto concerne le forme bilineari a_1 e a_2 facciamo nel primo l'ipotesi

$$(6) \quad a_\ell(\cdot, y, z) \in C^{0,1}([0, T]) \quad \forall y, z \in V_\ell,$$

$$|a'_\ell(t, y, z)|^{(2)} \leq c''' \|y\|_\ell \|z\|_\ell \quad \text{q.o. su }]0, T[\quad \forall y, z \in V \quad (c''' = \text{cost.} > 0),$$

nel secondo la (6) con $\ell = 1$ e l'ipotesi

$$(7) \quad a_2(t, y, z) = a_2(y, z) \quad \forall y, z \in V_2,$$

ammettiamo cioè che a_2 sia indipendente da t .

TEOREMA 1. nelle ipotesi (6),

$$i_1) \quad a_\ell(t, y, z) = a_\ell(t, z, y) \quad \forall t \in [0, T] \text{ e } \forall y, z \in V_\ell,$$

$$i_2) \quad \psi \in H^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad \psi'(t) \leq 0 \quad \text{su } \Omega \quad \text{q.o. su }]0, T[,$$

$$i_3) \quad u_{10} \in V_1, K_0 = \{z \in V_2 : u_{10} + \psi(0) \leq z \quad \text{su } \Omega\} \neq \emptyset,$$

$$i_4) \quad f_1 = g_1 + g_2, \text{ con } g_1 \in H^1(0, T; V_1') \text{ e } g_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1)),$$

$$f_2 \in H^1(0, T; V_2'),$$

il problema (*) ammette una e una sola soluzione (u_1, u_2) con

$$u_\ell \in L^\infty(0, T; V_\ell) \quad , \quad u_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_1)).$$

Dim. Osserviamo dapprima che

$$(8) \quad \overline{K \cap D(L)} = K \quad \text{in} \quad \prod_{\ell=1}^2 L^2(0, T; V_\ell).$$

Infatti, se $(v_1, v_2) \in K$, fissato $u_{20} \in K_0$ e detto $v_{\ell n}$ l'elemento di $H^1(0, T; V_\ell)$ soluzione del problema di Cauchy

$$(9) \quad \frac{1}{n} v'_{\ell n}(t) + v_{\ell n}(t) = v_\ell(t) \quad \text{q.o. su }]0, T[,$$

$$v_{\ell n}(0) = u_{\ell 0},$$

si ha, per la $i_2)$ [6]

$$(v_{1n}, v_{2n}) \in K \cap D(L)$$

e [2]

$$v_{\ell n} \rightarrow v_\ell \quad \text{in } L^2(0, T; V_\ell).$$

La monotonia di L e la coercività uniforme rispetto a t delle forme bilineari $a_{1\lambda}$ e a_2 assicurano ([2], teor. II.1 pag. 63) l'esistenza di un elemento $(u_1, u_2) \in K$ tale che:

$$(2) \quad a'_\ell(t, y, z) = \frac{d}{dt} a_\ell(t, y, z).$$

$$\begin{aligned}
 (v_n(t_0), z)_1 &= (\phi(t_0)v_n(t_0), z)_1 = -\int_0^T [\phi(t)v_n(t)]' dt, z)_1 = \\
 &= -\int_0^T \langle [\phi(t)v_n(t)]', z \rangle_1 dt = -\int_0^T (\phi'(t)v_n(t), z)_1 dt - \int_0^T \langle \phi(t)v_n'(t), z \rangle_1 dt = \\
 &= -\int_0^T (v_n(t), z)_1 \phi'(t) dt - \int_0^T \langle v_n'(t), z \rangle_1 \phi(t) dt,
 \end{aligned}$$

da cui la (5). Se $t_0 = T$ vale un ragionamento analogo assumendo

$$\phi(T) = 1 \text{ e } \phi(0) = 0.$$

Dalle (4), (5) segue l'asserto in forza della densità di V_1 in $L^2(\Omega_1)$.

Convienne per il seguito introdurre l'operatore L di dominio

$$D(L) = \{(v_1, v_2) \in S_1 \times L^2(0, T; V_2) : v_1(0) = u_{10}\},$$

dove $u_{10} \in L^2(\Omega_1)$, definito dalla relazione

$$\forall v = (v_1, v_2) \in D(L) \text{ e } \forall w = (w_1, w_2) \in \Pi_{1\ell}^2 L^2(0, T; V_\ell)$$

$$\langle Lv, w \rangle = \int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} v_1(t), e^{-\lambda t} w_1(t) \right\rangle_1 dt.$$

L'operatore L , che è a valori in $[\Pi_{1\ell}^2 L^2(0, T; V_\ell)]'$, è monotono.

Si ha di più:

(1.2). L è massimale monotono.

La (1.2) consegue dalla ⁽¹⁾

(1.3). Qualunque siano $u_{10} \in L^2(\Omega_1)$ e $g_\ell \in L^2(0, T; V'_\ell)$, esiste un unico elemento $(u_1, u_2) \in D(L)$ tale che

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} u_1(t), e^{-\lambda t} v_1(t) \right\rangle_1 dt + \sum_{\ell}^2 \int_0^T \{((u_\ell(t), v_\ell(t)))_\ell + \\
 &- \langle g_\ell(t), v_\ell(t) \rangle_\ell\} e^{-2\lambda t} dt = 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in \Pi_{1\ell}^2 L^2(0, T; V_\ell).
 \end{aligned}$$

La (1.3) si dimostra utilizzando un teorema di rappresentazione di Riesz ed un noto risultato sulle equazioni variazionali lineari di evoluzione del primo ordine ([4], cap.3).

(¹) Se X è uno spazio di Banach reale e

$$A : X \rightarrow X' \quad L : D(L) \subseteq X \rightarrow X'$$

sono operatori il primo strettamente monotono e il secondo monotono, è facile constatare che

$$(A+L \text{ suriettivo}) \implies (L \text{ massimale monotono}).$$

$$(10) \int_0^T \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} v_1(t)], e^{-\lambda t} (v_1(t) - u_1(t)) \right\rangle_1 + \right. \\ \left. + a_{1\lambda}(t, u_1(t), v_1(t) - u_1(t)) e^{-2\lambda t} + a_2(t, u_2(t), v_2(t) - u_2(t)) e^{-2\lambda t} + \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^2 \langle f_l(t), v_l(t) - u_l(t) \rangle_l e^{-2\lambda t} \right\} dt \geq 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in D(L) \cap K.$$

La (10) implica che

$$(11) \int_0^T \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} v_1(t)], e^{-\lambda t} (v_1(t) - u_1(t)) \right\rangle_1 + \right. \\ \left. + a_{1\lambda}(t, v_1(t), v_1(t) - u_1(t)) e^{-2\lambda t} + a_2(t, v_2(t), v_2(t) - u_2(t)) e^{-2\lambda t} + \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^2 \langle f_l(t), v_l(t) - u_l(t) \rangle_l e^{-2\lambda t} \right\} dt \geq 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in D(L) \cap K.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia u_{ln} la soluzione del problema (9) con u_l in luogo di v_l . Dalla (11), con $v_l = u_{ln}$, si ottiene:

$$\|u'_{1n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq c \quad (c = \text{cost. indep. da } n).$$

Pertanto, tenuto conto che

$$u_{1n} \rightarrow u_1 \quad \text{in } L^2(0,T;V_1), \\ u_{1n}(0) = u_{10} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si ha:

$$u'_1 \in L^2(0,T;L^2(\Omega_1))$$

ed inoltre

$$u_1(0) = u_{10}$$

in virtù della (1.1).

A partire dalla (10) e tenendo presente la (8), si vede con procedimento standard [1] che (u_1, u_2) soddisfa anche la (2), sicchè essa è la soluzione del problema (*). Vale allora la disuguaglianza:

$$\int_0^t \left\{ \left\langle \frac{d}{ds} [e^{-\lambda s} v_1(s)], e^{-\lambda s} (v_1(s) - u_1(s)) \right\rangle_1 + \right. \\ \left. + a_{1\lambda}(s, v_1(s), v_1(s) - u_1(s)) e^{-2\lambda s} + a_2(s, v_2(s), v_2(s) - u_2(s)) e^{-2\lambda s} + \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^2 \langle f_l(s), v_l(s) - u_l(s) \rangle_l e^{-2\lambda s} \right\} ds \geq 0$$

$$\forall t \in [0, T] \quad \text{e } \forall (v_1, v_2) \in D(L) \cap K$$

la quale, utilizzata con $v_l = u_{ln}$, dà luogo ad una maggiorazione del tipo

$$\sum_{l=1}^2 \|e^{-\lambda t} u_{ln}(t)\|_l^2 \leq c_1 + c_2 \int_0^t \sum_{l=1}^2 \|e^{-\lambda s} u_{ln}(s)\|_l^2 ds$$

$$\forall t \in [0, T] \quad (c_i = \text{cost. indep. da } n).$$

Ne segue, per il lemma di Gronwall

$$\|u_{ln}\|_{C^0([0,T],V_l)} \leq c \quad (c = \text{cost. indep. da } n)$$

e quindi

$$u_\ell \in L^\infty(0, T; V_\ell).$$

TEOREMA 2. Nelle ipotesi (6) con $\ell = 1, (7)$,

$$i_5) \psi \in L^2(\Omega), \psi \leq 0 \text{ su } \Omega,$$

$$i_6) u_{10} \in V_1, A_1(0)u_{10} \in L^2(\Omega_1),$$

$$i_7) f_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_1)), f_2 \in V_2', u_{20} = A_2^{-1} f_2 \geq u_{10} + \psi \text{ su } \Omega,$$

il problema (*) ammette una e una sola soluzione (u_1, u_2) e si ha:

$$u_\ell \in H^1(0, T; V_\ell), u_1' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), u_2(0) = u_{20}.$$

Dim. Ci limiteremo a provare la seguente proposizione:

α) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un unico elemento $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in \prod_{1,2}^2 H^1(0, T; V_\ell)$, con $u_{1\varepsilon}' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$, tale che:

$$(12) u_{\ell\varepsilon}(0) = u_{\ell 0},$$

$$(13) \int_0^T \left\{ \left(\frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} u_{1\varepsilon}(t)], e^{-\lambda t} v_1(t) \right)_1 + a_1(t, u_{1\varepsilon}(t), v_1(t)) e^{-2\lambda t} + \right. \\ \left. + a_2(u_{2\varepsilon}(t), v_2(t)) e^{-2\lambda t} dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T ([u_{1\varepsilon}(t) + \psi - u_{2\varepsilon}(t)]^+, v_1(t) - v_2(t)) e^{-2\lambda t} dt \right. \\ \left. = \int_0^T (f_1(t), v_1(t))_1 e^{-2\lambda t} dt + \int_0^T \langle f_2, v_2(t) \rangle_2 e^{-2\lambda t} dt \right. \\ \left. \forall (v_1, v_2) \in \prod_{1,2}^2 L^2(0, T; V_\ell), \right.$$

$$(14) \|u_{1\varepsilon}'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))} + \|u_{1\varepsilon}\|_{H^1(0, T; V_1)} + \|u_{2\varepsilon}\|_{H^1(0, T; V_2)} \leq c$$

($c = \text{cost. indep. da } \varepsilon$).

Infatti, una volta acquisita la α), notiamo che la (14) assicura l'esistenza di una successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$ di numeri positivi e di $(u_1, u_2) \in \prod_{1,2}^2 H^1(0, T; V_\ell)$, con $u_{1\varepsilon}' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$, per cui si abbia:

$$u_{\ell\varepsilon_n} \rightarrow u_\ell \text{ in } H^1(0, T; V_\ell) \text{ debolmente,} \\ u_{1\varepsilon_n}' \rightarrow u_1' \text{ in } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)) \text{ debolmente } *.$$

Un ragionamento simile a quello seguito in [6] (teor. 2) ci consente di concludere che (u_1, u_2) è la soluzione del problema (*).

E' facile stabilire l'unicità di $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$. Dimostriamone l'esistenza. Per ogni $z \in V_1$ denotiamo con $\tau_\varepsilon z$ l'elemento di V_2 soluzione dell'equazione variazionale

$$a_2(\tau_\epsilon z, y) = \frac{1}{\epsilon} ([z + \psi - \tau_\epsilon z]^+, y) + \langle f_2, y \rangle_2 \quad \forall y \in V_2.$$

L'esistenza e l'unicità di $\tau_\epsilon z$ si desumono dal fatto che l'operatore $B_\epsilon: V_2 \rightarrow V_2'$ definito dalla relazione

$$\langle B_\epsilon y, w \rangle_2 = a_2(y, w) - \frac{1}{\epsilon} ([z + \psi - y]^+, w) \quad \forall y, w \in V_2$$

è strettamente monotono, emicontinuo e coercivo [5]. A proposito di τ_ϵ rileviamo che:

$$(15) \quad \|\tau_\epsilon z_1 - \tau_\epsilon z_2\|_2 \leq c \|z_1 - z_2\|_1 \quad \forall z_1, z_2 \in V_1 \quad (c = \text{cost. dip. da } \epsilon).$$

Sia $\{z_n\}$ una base di V_1 , esistente in virtù della separabilità di V_1 , e V_{1m} il sottospazio generato da $\{z_1, \dots, z_m\}$. Ammettiamo che $u_{10} \in V_{1m}$ e indichiamo con $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ ($\xi_i = 0$ per $i > 1$) le componenti di u_{10} in V_{1m} . Sussistendo la (15), la prima delle (6) con $\ell = 1$ e le prime delle i_s, i_7 , un risultato classico relativo ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie assicura l'esistenza di un'unica funzione vettoriale $(g_{\epsilon 1m}, \dots, g_{\epsilon mm}) \in H^{2,1}(0, T; R^m)$ tale che, qualunque sia $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m (z_i, z_j)_1 g'_{\epsilon im}(t) + \sum_{i=1}^m a_1(t, z_i, z_j) g_{\epsilon im}(t) + \\ & + \frac{1}{\epsilon} ([\sum_{i=1}^m g_{\epsilon im}(t) z_i + \psi - \tau_\epsilon (\sum_{i=1}^m g_{\epsilon im}(t) z_i)]^+, z_j)_1 = (f_1(t), z_j)_1 \\ & \quad \forall t \in [0, T], \\ & g_{\epsilon jm}(0) = \xi_j. \end{aligned}$$

Posto

$$u_{1\epsilon m} = \sum_{i=1}^m g_{\epsilon im} z_i, \quad u_{2\epsilon m} = \tau_\epsilon u_{1\epsilon m},$$

si ha allora che:

$$u_{1\epsilon m} \in H^{2,1}(0, T; V_1), \quad u_{2\epsilon m} \in C^{0,1}([0, T], V_2)$$

ed inoltre

$$(16) \quad u_{1\epsilon m}(0) = u_{10},$$

$$(17) \quad (u'_{1\epsilon m}(t), z)_1 + a_1(t, u_{1\epsilon m}(t), z) + \frac{1}{\epsilon} ([u_{1\epsilon m}(t) + \psi - u_{2\epsilon m}(t)]^+, z) = (f_1(t), z)_1 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{e } \forall z \in V_{1m},$$

$$(18) \quad a_2(u_{2\epsilon m}(t), y) - \frac{1}{\epsilon} ([u_{1\epsilon m}(t) + \psi - u_{2\epsilon m}(t)]^+, y) = \langle f_2, y \rangle_2 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{e } \forall y \in V_2.$$

Dalle (16), (18) e dalla terza delle i_7 si ricava

$$(19) \quad u_{2\epsilon m}(0) = u_{20}.$$

Le (17), (18) implicano che:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} u_{1\epsilon m}(t)], e^{-\lambda t} u_{1\epsilon m}(t) \right)_1 + a_{1\lambda}(t, u_{1\epsilon m}(t), u_{1\epsilon m}(t)) e^{-2\lambda t} + \\
& + a_2(u_{2\epsilon m}(t), u_{2\epsilon m}(t)) e^{-2\lambda t} + \\
& + \frac{1}{\epsilon} ([u_{1\epsilon m}(t) + \psi - u_{2\epsilon m}(t)]^+ u_{1\epsilon m}(t) - u_{2\epsilon m}(t)) e^{-2\lambda t} = \\
& = (f_1(t), u_{1\epsilon m}(t))_1 e^{-2\lambda t} + \langle f_2, u_{2\epsilon m}(t) \rangle_2 e^{-2\lambda t} \quad \forall t \in [0, T],
\end{aligned}$$

da cui, stante la (16) e la seconda delle i_5)

$$\begin{aligned}
& (c' - \frac{\sigma}{2}) \int_0^T \|u_{1\epsilon m}(t)\|_1^2 e^{-2\lambda t} dt + (c' - \frac{\sigma}{2}) \int_0^T \|u_{2\epsilon m}(t)\|_2^2 e^{-2\lambda t} dt \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \|u_{10}\|_1^2 + \frac{1}{2\sigma} \int_0^T |f_1(t)|_1^2 e^{-2\lambda t} dt + \frac{T}{2\sigma} \|f_2\|_{V_2'}^2 \quad \forall \sigma > 0.
\end{aligned}$$

Dunque:

$$(20) \quad \|u_{\epsilon m}\|_{L^2(0, T; V_\ell)} \leq c \quad (c = \text{cost. indep. da } \epsilon \text{ e da } m).$$

Ponendo nella (17) $t=0, z=u'_{1\epsilon m}(0)$, tenendo conto delle (16),

(19) e della seconda delle i_6), si ha:

$$(21) \quad |u'_{1\epsilon m}(0)|_1 \leq |f_1(0)|_1 + |A_1(0)u_{10}|_1.$$

Derivando rispetto a t le (17), (18), scegliendo poi $z=u'_{1\epsilon m}(t)$, $y=u'_{2\epsilon m}(t)$ e sommando membro a membro, osservato che

$$\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{d}{dt} [u_{1\epsilon m}(t) + \psi - u_{2\epsilon m}(t)]^+, \frac{d}{dt} [u_{1\epsilon m}(t) + \psi - u_{2\epsilon m}(t)]^+ \right) \geq 0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |e^{-\lambda t} u'_{1\epsilon m}(t)|_1^2 + c' \|e^{-\lambda t} u'_{1\epsilon m}(t)\|_1^2 + a'_1(t, u_{1\epsilon m}(t), u'_{1\epsilon m}(t)) e^{-2\lambda t} + \\
& + c' \|e^{-\lambda t} u'_{2\epsilon m}(t)\|_2^2 \leq (f'_1(t), u'_{1\epsilon m}(t)) e^{-2\lambda t} \quad \text{q.o. su }]0, T[
\end{aligned}$$

nonchè

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} |e^{-\lambda t} u'_{1\epsilon m}(t)|_1^2 + (c' - \frac{\sigma c'''}{2}) \int_0^t \|e^{-\lambda s} u'_{1\epsilon m}(s)\|_1^2 ds + \\
& + c' \int_0^t \|e^{-\lambda s} u'_{2\epsilon m}(s)\|_2^2 ds \leq \\
& \leq \frac{1}{2} |u'_{1\epsilon m}(0)|_1^2 + \frac{c'''}{2\sigma} \int_0^T \|e^{-\lambda t} u_{1\epsilon m}(t)\|_1^2 dt + \frac{1}{2\sigma} \left(\int_0^T |f'_1(t)|_1 e^{-\lambda t} dt \right)^2 + \\
& + \frac{\sigma}{2} \|e^{-\lambda t} u'_{1\epsilon m}\|_{C^0([0, T], L^2(\Omega_1))}^2 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{e } \forall \sigma > 0.
\end{aligned}$$

Quindi, sfruttando le (20), (21) si ha:

$$\begin{aligned}
(22) \quad & \|u'_{1\epsilon m}\|_{C^0([0, T], L^2(\Omega_1))} \leq c \\
& \|u'_{\ell\epsilon m}\|_{L^2(0, T; V_\ell)} \leq c. \quad (c = \text{cost. indep. da } m \text{ e da } \epsilon)
\end{aligned}$$

Per le (20), (22) esistono $(u_{1\epsilon}, u_{2\epsilon}) \in I_{1\ell}^2 H^1(0, T; V_\ell)$, con

$u'_{1\epsilon} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$, e $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ in modo che si abbia, almeno di estratte:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & u_{l\epsilon m} \rightarrow u_{l\epsilon} \quad \text{in } H^1(0,T;V_l) \text{ debolmente,} \\
 & u'_{1\epsilon m} \rightarrow u'_{1\epsilon} \quad \text{in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)) \text{ debolmente } *, \\
 & [u_{1\epsilon m} + \psi - u_{2\epsilon m}]^+ \rightarrow \theta \quad \text{in } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ debolmente.}
 \end{aligned}$$

Pertanto $(u_{1\epsilon}, u_{2\epsilon})$ verifica la (14) ed anche la (12) a causa delle (16), (19). Le (17), (18), (23), unitamente all'uguaglianza

$$\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_{1m}} = V_1,$$

comportano:

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & (u'_{1\epsilon}(t), z)_1 + a_1(t, u_{1\epsilon}(t), z) + a_2(u_{2\epsilon}(t), y) + \frac{1}{\epsilon} (\theta(t), z-y) = \\
 & = (f_1(t), z)_1 + \langle f_2, y \rangle_2 \quad \text{q.o. su }]0, T[\quad \forall (z, y) \in V_1 \times V_2.
 \end{aligned}$$

D'altra parte con semplice calcolo si vede che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^T ([u_{1\epsilon m}(t) + \psi - u_{2\epsilon m}(t)]^+, [u_{1\epsilon m}(t) - u_{2\epsilon m}(t)] - [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]) e^{-2\lambda t} dt \leq 0,$$

sicchè

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & [u_{1\epsilon m} + \psi - u_{2\epsilon m}]^+ \rightarrow [u_{1\epsilon} + \psi - u_{2\epsilon}]^+ \text{ in } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ debolmente} \\
 & \text{in quanto l'operatore } \beta_\epsilon: L^2(0,T;L^2(\Omega)) \rightarrow [L^2(0,T;L^2(\Omega))] \text{ co-} \\
 & \text{si definito}
 \end{aligned}$$

$$\langle \beta_\epsilon v, w \rangle = \frac{1}{\epsilon} \int_0^T ([v(t) + \psi]^+, w(t)) e^{-2\lambda t} dt \quad \forall v, w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

è pseudo-monotono.

Dalla terza delle (23) e dalla (25) segue che $\theta = [u_{1\epsilon} + \psi - u_{2\epsilon}]^+$.

Vale allora la (13) in forza della (24).

3.-

Con i teoremi 1 e 2 abbiamo conseguito l'esistenza della soluzione in spazi regolari sotto ipotesi piuttosto restrittive sui dati; ora, invece, in un caso particolare, la proveremo in ipotesi più deboli sulle forme bilineari, su f_1 e sul dato iniziale u_{10} .

Detto Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ limitato e connesso, assumiamo

$$V_1 = H_0^m(\Omega) \quad \text{con } m \geq 2, \quad V_2 = H_0^1(\Omega)$$

e

$$\begin{aligned}
 K = \{ (v_1, v_2) \in L^2(0,T;H_0^m(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) : v_1(t) \leq v_2(t) \text{ su } \Omega \\
 \text{q.o. su }]0, T[\}.
 \end{aligned}$$

Siano dati gli operatori

$$A_1(t) = \sum_{\substack{|r|=m \\ |s|=m}} (-1)^m D^r (a_{rs}(t, x) D^s),$$

$$A_2(t) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j}),$$

con le seguenti ipotesi:

$$a_{rs}, b_{ij} \in L^\infty(]0, T[\times \Omega),$$

$$b_{ij}(t, \cdot) \in C^{0,1}(\Omega) \text{ q.o. rispetto a } t, \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_h} \in L^\infty(]0, T[\times \Omega),$$

$$\sum_{\substack{|r|=m \\ |s|=m}} \int_{\Omega} a_{rs}(t, x) D^s y D^r y \, dx \geq a_0 \sum_{|r|=m} \int_{\Omega} |D^r y|^2 \, dx \quad \text{q.o. su }]0, T[$$

$\forall y \in H_0^m(\Omega) \quad (a_0 = \text{cost.} > 0),$

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} b_{ij}(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \, dx \geq b_0 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^2 \, dx \quad \text{q.o. su }]0, T[$$

$\forall y \in H_0^1(\Omega) \quad (b_0 = \text{cost.} > 0),$

sicchè le forme bilineari

$$a_1(t, y, z) = \sum_{\substack{|r|=m \\ |s|=m}} \int_{\Omega} a_{rs}(t, x) D^s y D^r z \, dx \quad \forall y, z \in H_0^m(\Omega)$$

$$a_2(t, y, z) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} b_{ij}(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} \, dx \quad \forall y, z \in H_0^1(\Omega)$$

verificano le (1) con $\lambda = 0$.

TEOREMA 3. Nelle ipotesi sopra precisate, qualunque siano

$$f_1 \in L^2(0, T; H^{-m}(\Omega)), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad u_{10} \in L^2(\Omega),$$

esiste un unico elemento $(u_1, u_2) \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

con $u'_1 \in L^2(0, T; H^{-m}(\Omega))$, soluzione del problema (*).

Dim. Intanto si ha:

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un unico elemento

$$(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

con $u'_{1\varepsilon} \in L^2(0, T; H^{-m}(\Omega))$, soddisfacente alle condizioni:

$$(26) \quad u_{1\varepsilon}(0) = u_{10},$$

$$(27) \quad \int_0^T \langle u'_{1\varepsilon}(t), v_1(t) \rangle_1 \, dt + \sum_{\ell=1}^2 \int_0^T a_{\ell}(t, u_{\ell\varepsilon}(t), v_{\ell}(t)) \, dt +$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (\|u_{1\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)\|^\dagger, v_1(t) - v_2(t)) \, dt =$$

$$= \sum_{\ell=1}^2 \int_0^T \langle f_{\ell}(t), v_{\ell}(t) \rangle_{\ell} \, dt$$

$$\forall (v_1, v_2) \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

L'unicità di (u_1, u_2) è ovvia. L'esistenza è conseguenza della

massimale monotonicità di L (prop.(1.2)) e del fatto che l'operatore C_ϵ così definito

$$\langle C_\epsilon v, w \rangle = \sum_{i=1}^2 \int_0^T a_i(t, v_i(t), w_i(t)) dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T ([v_1(t) - v_2(t)]^+, w_1(t) - w_2(t)) dt$$

$$\forall (v_1, v_2), (w_1, w_2) \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

è pseudo-monotono, limitato e coercivo [1].

Dalla (27) con $v_k = u_{k\epsilon}$, stante la (26), si ricava

$$(28) \quad \frac{c}{2} \|u_{1\epsilon}\|_{L^2(0, T; H_0^m(\Omega))}^2 + \frac{c}{2} \|u_{2\epsilon}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} |u_{10}|^2 + \frac{1}{2c} \|f_1\|_{L^2(0, T; H^{-m}(\Omega))}^2 + \frac{1}{2c} \|f_2\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2$$

Sempre dalla (27), con $v_1=0$ e $v_2=[u_{1\epsilon}-u_{2\epsilon}]^+$, si ottiene

$$(29) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \int_0^T ([u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+, [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt = \\ & = \int_0^T a_2(t, u_{2\epsilon}(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt - \int_0^T (f_2(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt = \\ & = - \int_0^T a_2(t, u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt + \\ & + \int_0^T a_2(t, u_{1\epsilon}(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt - \int_0^T (f_2(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt \leq \\ & \leq \int_0^T a_2(t, u_{1\epsilon}(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt - \int_0^T (f_2(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt = \\ & = \int_0^T (A_2(t) u_{1\epsilon}(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt - \int_0^T (f_2(t), [u_{1\epsilon}(t) - u_{2\epsilon}(t)]^+) dt \leq \\ & \leq (\|A_2 u_{1\epsilon}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|f_2\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2) \| [u_{1\epsilon} - u_{2\epsilon}]^+ \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

Poichè

$$\|A_2 u_{1\epsilon}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \|u_{1\epsilon}\|_{L^2(0, T; H_0^{in}(\Omega))}$$

($c = \text{cost. indep. da } \epsilon$),

dalle (28), (29) si deduce che

$$(30) \quad \left\| \frac{[u_{1\epsilon} - u_{2\epsilon}]^+}{\epsilon} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \quad (c = \text{cost. indep. da } \epsilon)$$

e di conseguenza, utilizzando la (27) con $v_2 = 0$

$$(31) \quad \|u_{1\epsilon}'\|_{L^2(0, T; H^m(\Omega))} \leq c \quad (c = \text{cost. indep. da } \epsilon).$$

In base alle (28), (31) esistono una successione infinitesi-

ma $\{\epsilon_n\}$ di numeri positivi e $(u_1, u_2) \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

con $u_i' \in L^2(0, T; H^{-m}(\Omega))$, tali che:

$$(32) \quad u_{1\varepsilon_n} \rightarrow u_1 \quad \text{in } L^2(0,T;H_0^m(\Omega)) \text{ debolmente,}$$

$$(33) \quad u_{2\varepsilon_n} \rightarrow u_2 \quad \text{in } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ debolmente,}$$

$$(34) \quad u'_{1\varepsilon_n} \rightarrow u'_1 \quad \text{in } L^2(0,T;H^{-m}(\Omega)) \text{ debolmente.}$$

Le (26), (32), (34) e la (1.1) ci dicono che $u_1(0) = u_{10}$. Le (30), (32), (33) implicano

$$(u_1, u_2) \in K.$$

A partire dalla (27) con $(v_1, v_2) \in K$, e tenendo presente le (26), (32), (33), (34) e la (1.1) è agevole constatare che vale la (2).

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, via Claudio, 21 -
80125 Napoli.

BIBLIOGRAFIA

- 1 H. BREZIS, Inéquations variationnelles associées à des opérateurs d'évolution. Theory and applications of monotone operator. (A. Ghizzetti ed.), NATO Summer School Venice, Oderisi, 1969.
- 2 H. BREZIS, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51(1972), 1-1968.
- 3 J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier - Villars, Paris, 1969.
- 4 J. L. LIONS-E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1, Dunod, 1968.
- 5 G. STAMPACCHIA, Variational inequalities. Theory and applications of monotone operators (A. Ghizzetti ed.), NATO Summer School Venice, Oderisi, 1969.
- 6 R. TOSCANO, Teoremi di esistenza e di regolarità per una classe di disequazioni variazionali di evoluzione del primo ordine, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste, Vol. XVII (1985).

I N D I C E

M. R. Posteraro - Una osservazione sul riordinamento del gradiente di una funzione	Pag. 5
M. Calabritto - Sulla simmetrizzazione di un problema misto non lineare ellittico degenero	" " 15
T. De Pippo - Coastal Dynamics and Sedimentary Transit Axes on Volturno River Mouth (Campania, Italy)	" " 27
P. E. Abbaticchio, G. Baldassarre, M. Petrella - Ceneri volanti per la produzione di cementi	" " 47
M. R. Ghiara, D. Stanzione - Studio Geochimico sul sistema idroter- male dei Campi flegrei	" " 61
T. Pescatore - La sedimentazione Miocenica nell'Appennino Campano Lucano	" " 85
S. Scippa, G. Iazzetti, M. de Vincentiis - Intracellular Localization of Vanadium and Iron in the Branchial Basket of the Ascidian <u>Ascidia Malaga</u>	" " 107
M. Di Iorio - -Convergenza e nozioni di continuit� per multifun- zioni ad essa collegate	" " 113
G. Mulone - On the Stability of a Rotating Fluid with Prandtl Numbers Less than 1	" " 123
G. Mulone, F. Salemi - Some Continuous Dependence Theorems in MHD with Hall Ion-Slip Currents in Unbounded Domains	" " 139
A. Gallo, A.M. Piccirillo - Su una classe di disequazioni variazionali di evoluzione del primo ordine	" " 153

